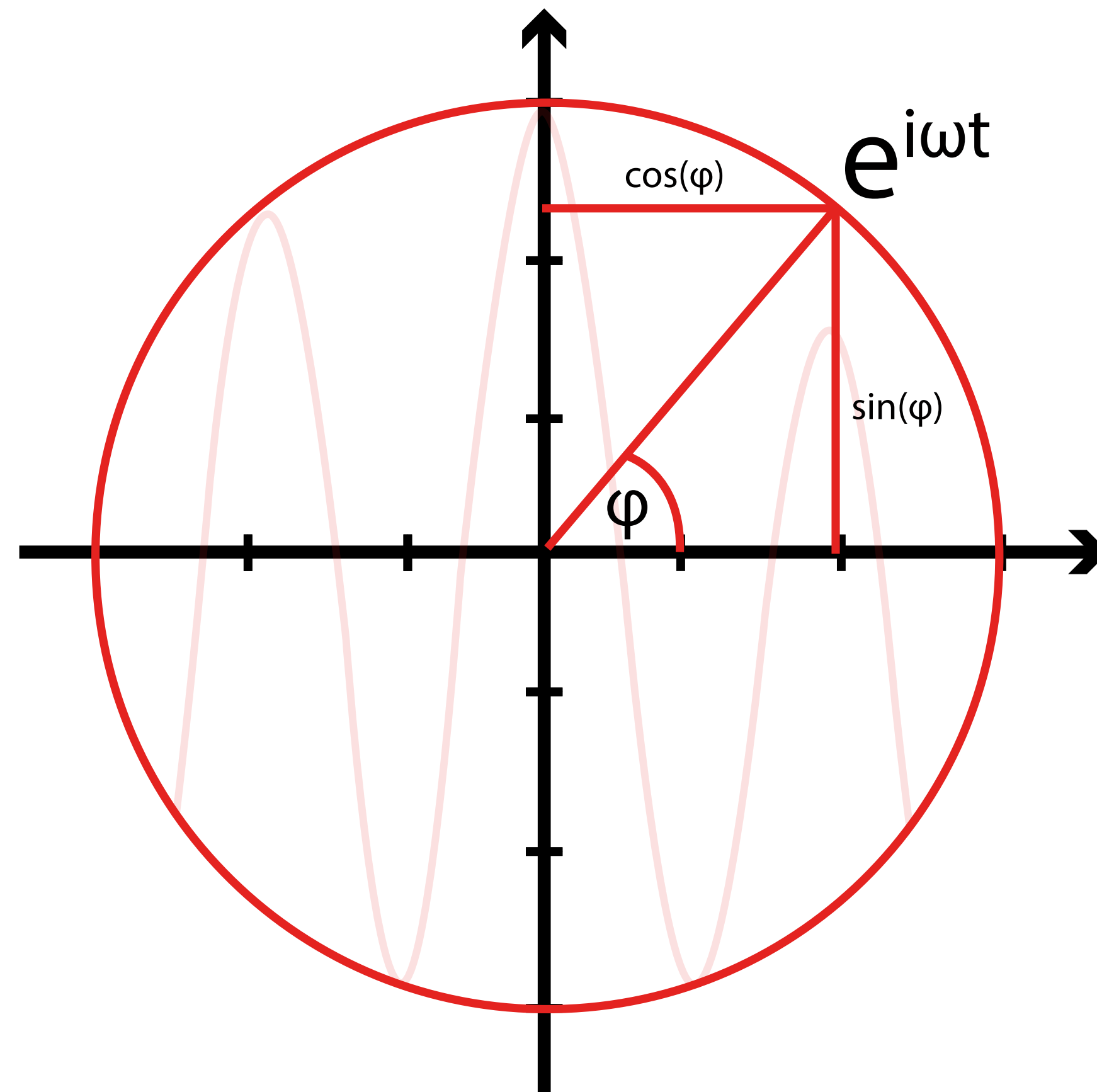




Analysis

II

Vorwort

Dieser Foliensatz wird durch das Zentrum für angewandte Ökonomik (ZAÖ) der DHBW Ravensburg bereitgestellt.

Autoren: Prof. Dr. Daniel Blochinger
Illustration: Prof. Dr. Daniel Blochinger
Stand: 8. April 2026
Lizenz: [CC BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Weitere Lehr- und Lernmaterialien finden Sie auf unserer [Webseite](#).

Fehler gefunden? E-Mail an blochinger@dhbw-ravensburg.de!



Inhaltsverzeichnis

<u>Wiederholung Differenzialrechnung</u>	4 - 9
<u>Vektoranalysis</u>	10 - 47
<u>Differenzialgleichungen</u>	48 - 83
<u>Mehrdimensionale Integralrechnung</u>	84 - 107
<u>Trigonometrie</u>	108 - 127
<u>Komplexe Zahlen</u>	128 - 138
<u>Fourieranalyse</u>	139 - 145

Stetigkeit

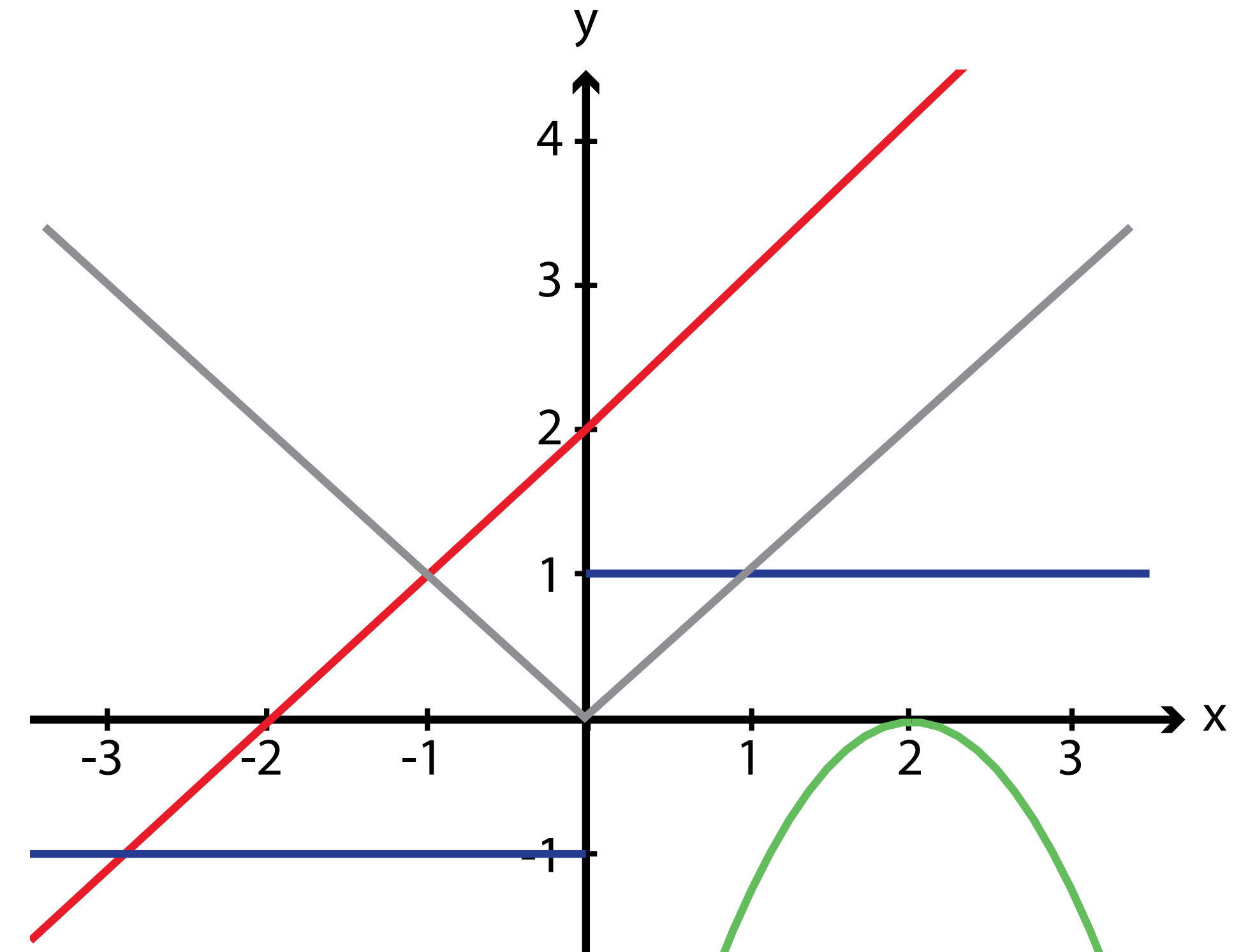
Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann **stetig** bei x_0 , wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dazu muss der Grenzwert an dieser Stelle existieren, d.h.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Bildlich Die Funktion darf bei x_0 weder einen Sprung noch eine Lücke haben.

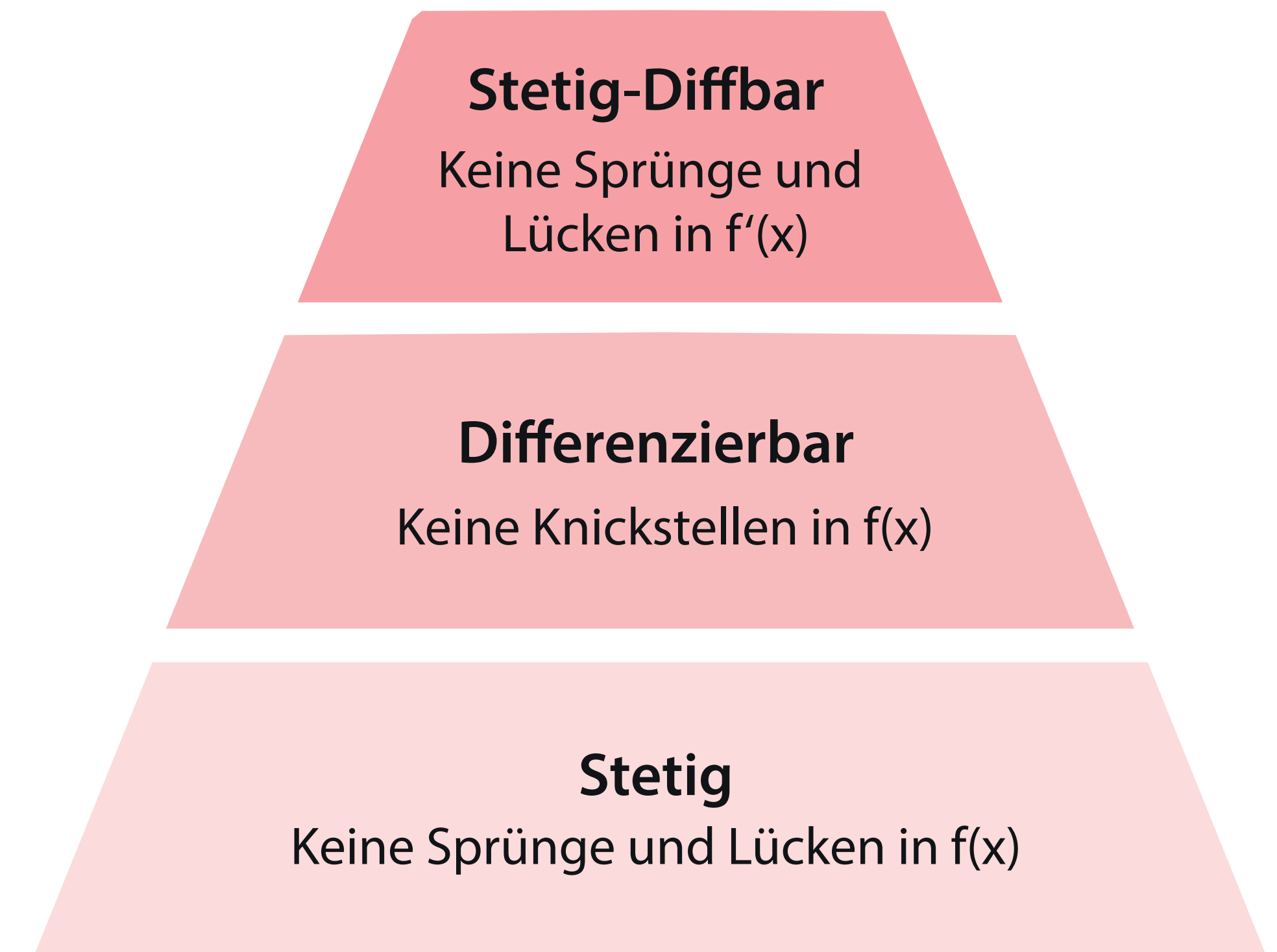


Differenzierbarkeit

Die Eigenschaft der Differenzierbarkeit baut auf der Stetigkeit auf. Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann **differenzierbar** bei x_0 , wenn folgender Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Bildlich Die Funktion darf bei x_0 weder einen Sprung noch eine Lücke noch einen Knick haben.



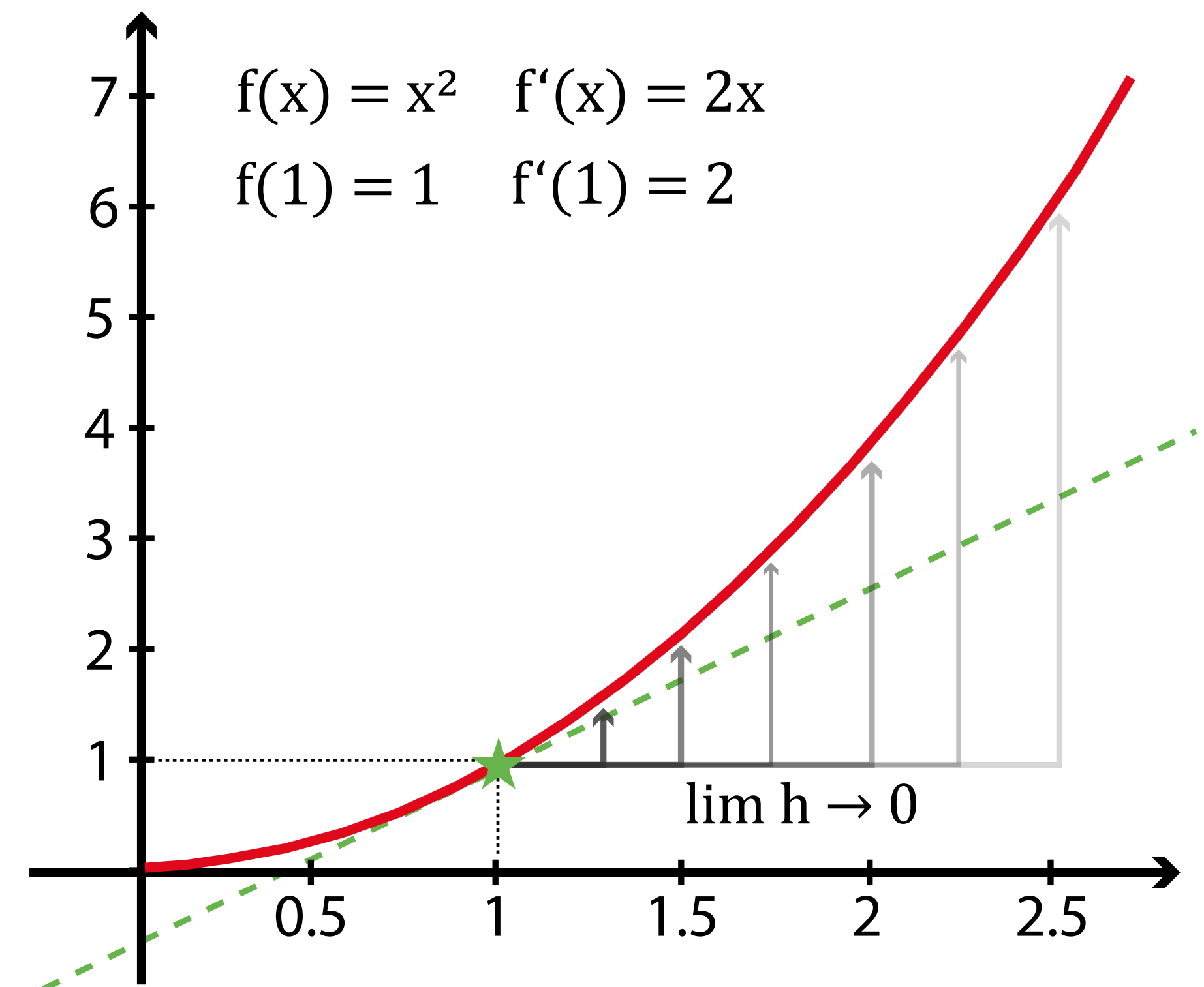
Ableitung

Sei $f(x)$ eine um x_0 differenzierbare Funktion. Wir bezeichnen den Grenzwert ...

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

... als Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 .

Bildlich Wir messen die Steigung an der Stelle x_0 mit einem immer kleiner werdenden Steigungsdreieck.



Ableitungsregeln I

Potenzen werden mit der rechts gezeigten Regel abgeleitet. Diese Regel gilt auch für negative und nicht ganzzahlige Exponenten b:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{0.5} \quad f'(x) = 0.5x^{-0.5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Potenzregel

$$f(x) = a \cdot x^b$$

$$f'(x) = \overset{\text{↖}}{a} \cdot x^{b-1} \\ = b \cdot a \cdot x^{b-1}$$

Ableitungsregeln I

Logarithmus Die Ableitung des natürlichen Logarithmus ergibt den Kehrwert von x.

$$f(x) = a \cdot \ln(x) \quad f'(x) = ax^{-1} = \frac{a}{x}$$

Exponentialfunktion Die Ableitung von $a \cdot e^x$ ergibt unverändert $a \cdot e^x$

$$f(x) = a \cdot e^x \quad f'(x) = a \cdot e^x$$

Potenzregel

$$f(x) = a \cdot x^b$$

$$f'(x) = a \cdot x^{b-1}$$
$$= b \cdot a \cdot x^{b-1}$$

Ableitungsregeln II

Sehr häufig besteht die zu ableitende Funktion aus einer Kombination von diesen Termen!

Mit plus/minus verbundene Terme werden gemäß der **Summenregel** getrennt voneinander abgeleitet.

Für Produkte und Quotienten gibt es die **Produkt- und Quotientenregel**.

Für verschachtelte Funktionen gibt es die **Kettenregel**.

Kettenregel

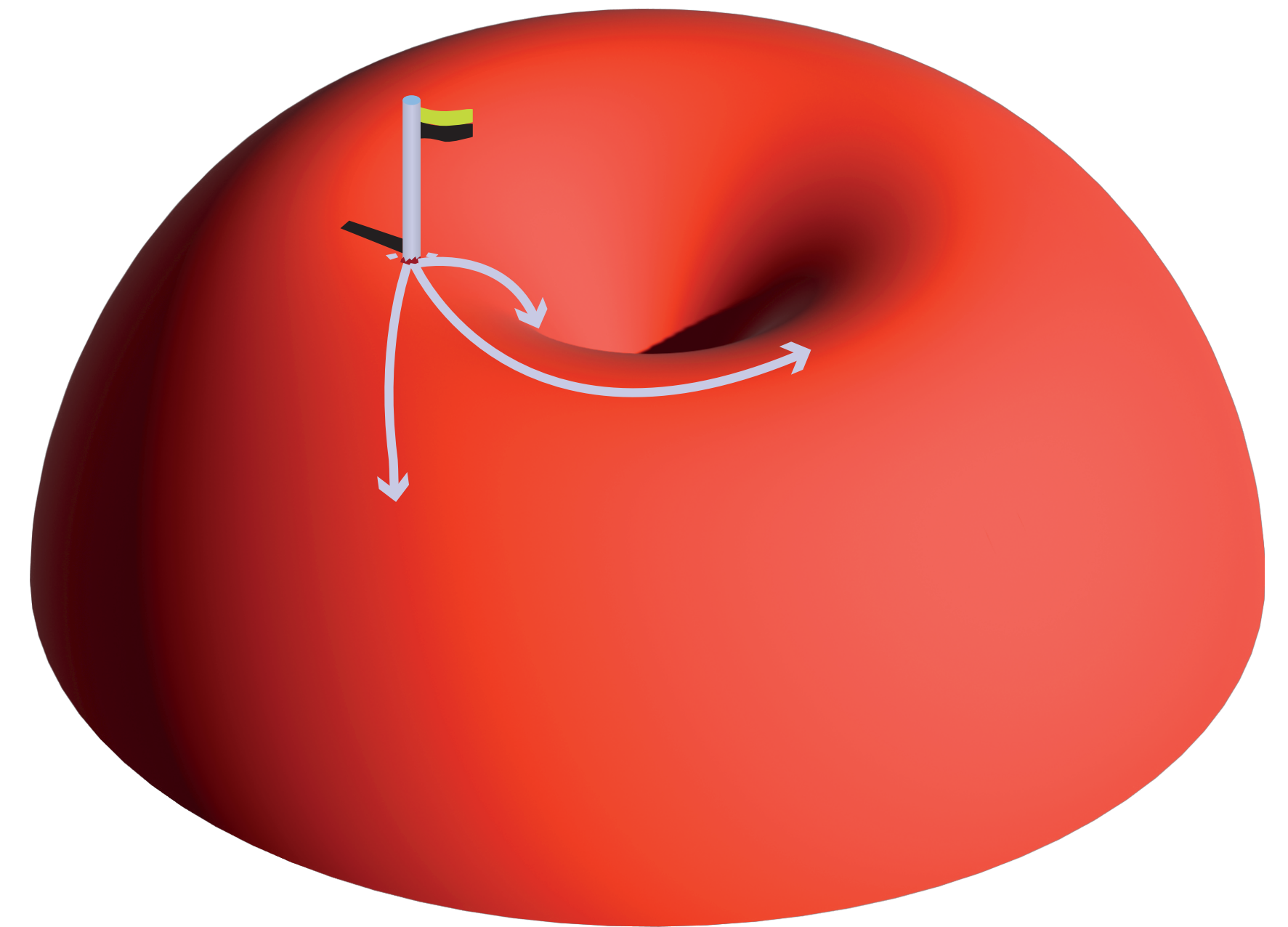
$$f(x) = \overbrace{g(\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}})}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \overbrace{g'(\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}})}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

Totales Differenzial

Betrachten wir eine Funktion mit mehreren Variablen, wird die Interpretation als "Steigung an einem Punkt" schwierig. Wie hoch ist die Steigung an der Fahne?

Die Antwort hängt von der Richtung ab!



Totales Differenzial

Sei dx die Änderung in Richtung x und dy die Änderung in Richtung y . Dann ist das totale Differenzial df definiert als:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Die blau markierten Ausdrücke sind die **partiellen Ableitungen** der Funktion nach den Variablen x und y .

Die Rechenregeln für partielle Ableitungen sind dieselben wie bisher, nur dass wir alle anderen Variablen als Konstanten betrachten!

Beispiel partielle Ableitung

$$f(x,y,z) = x^2y + ye^z + 8x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + e^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ye^z$$

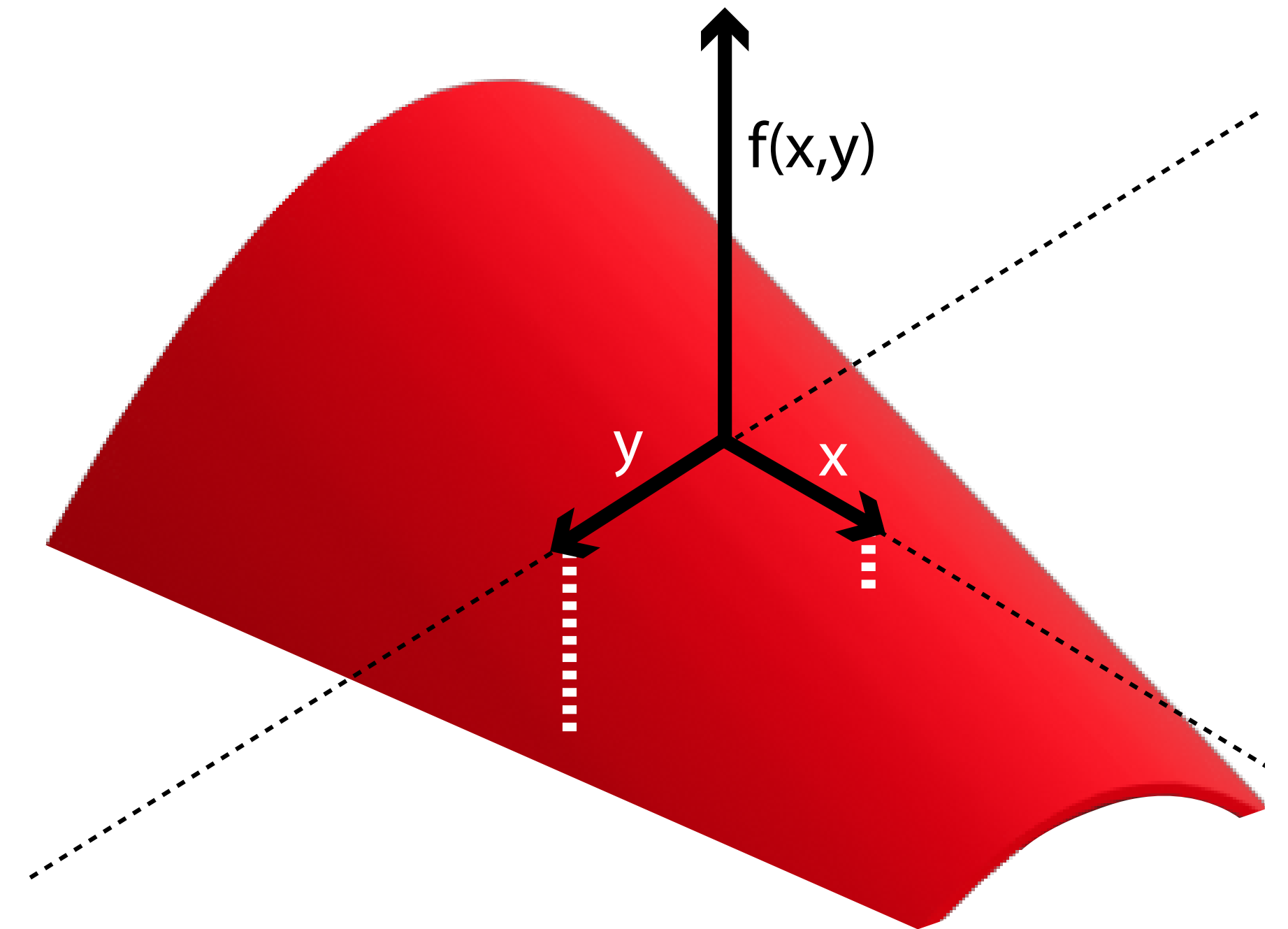
Totales Differenzial

Betrachten wir eine einfache Beispielfunktion, die in Richtung x linear und in Richtung y quadratisch abfällt:

$$f(x,y) = 10 - x - y^2$$

Das totale Differenzial ist gegeben durch:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = -1 dx - 2y dy$$



Totales Differenzial

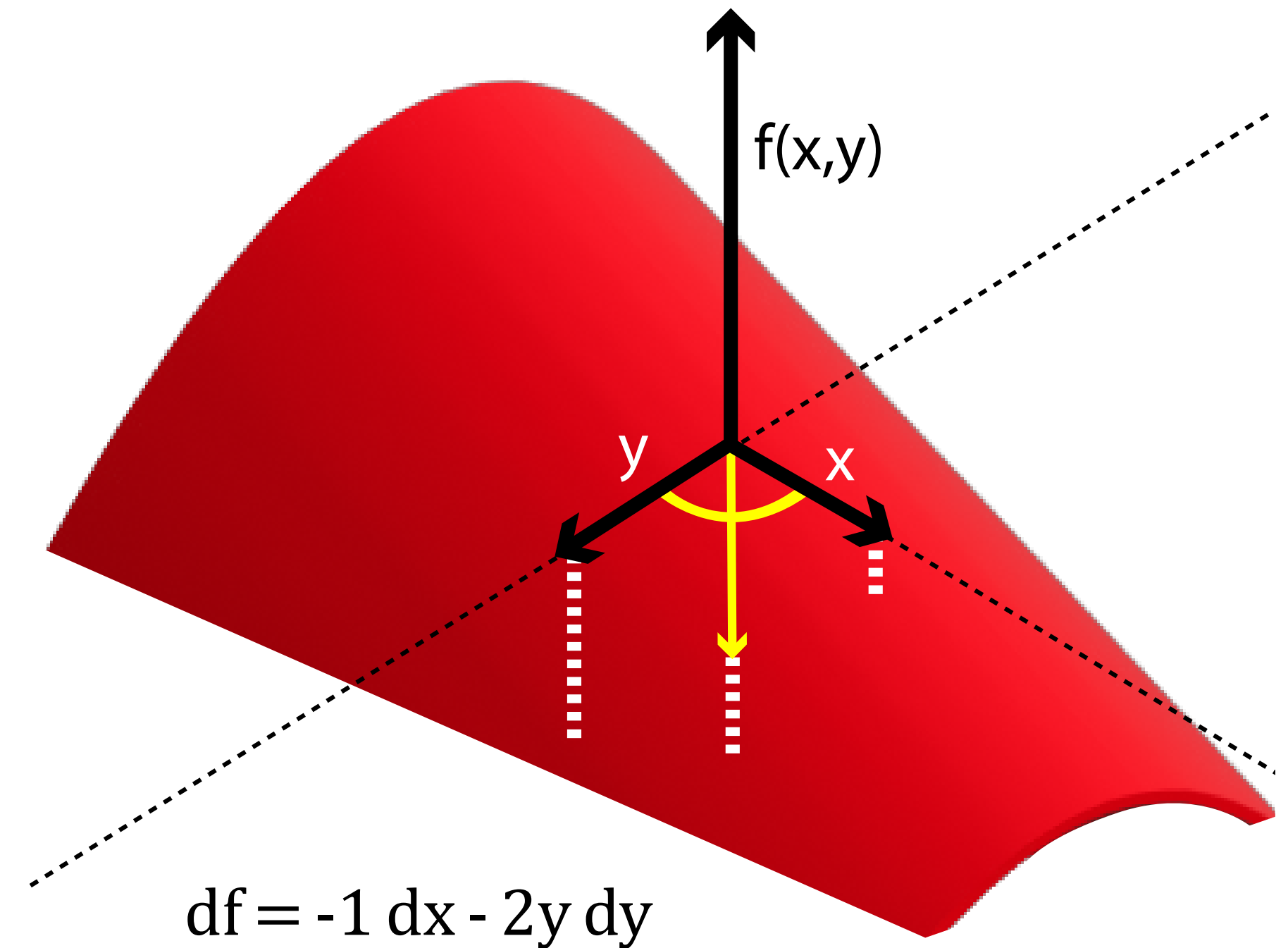
Laufen wir in Richtung x , gilt $dx=1$ und $dy=0$. Die Steigung ist:

$$df = -1 \cdot 1 - 2y \cdot 0 = -1$$

Laufen wir in Richtung y , gilt $dx=0$ und $dy=1$. Die Steigung ist:

$$df = -1 \cdot 0 - 2y \cdot 1 = -2y$$

Was passiert, wenn wir in die gelbe Richtung gehen, d.h. entlang der Diagonalen zwischen x und y ?



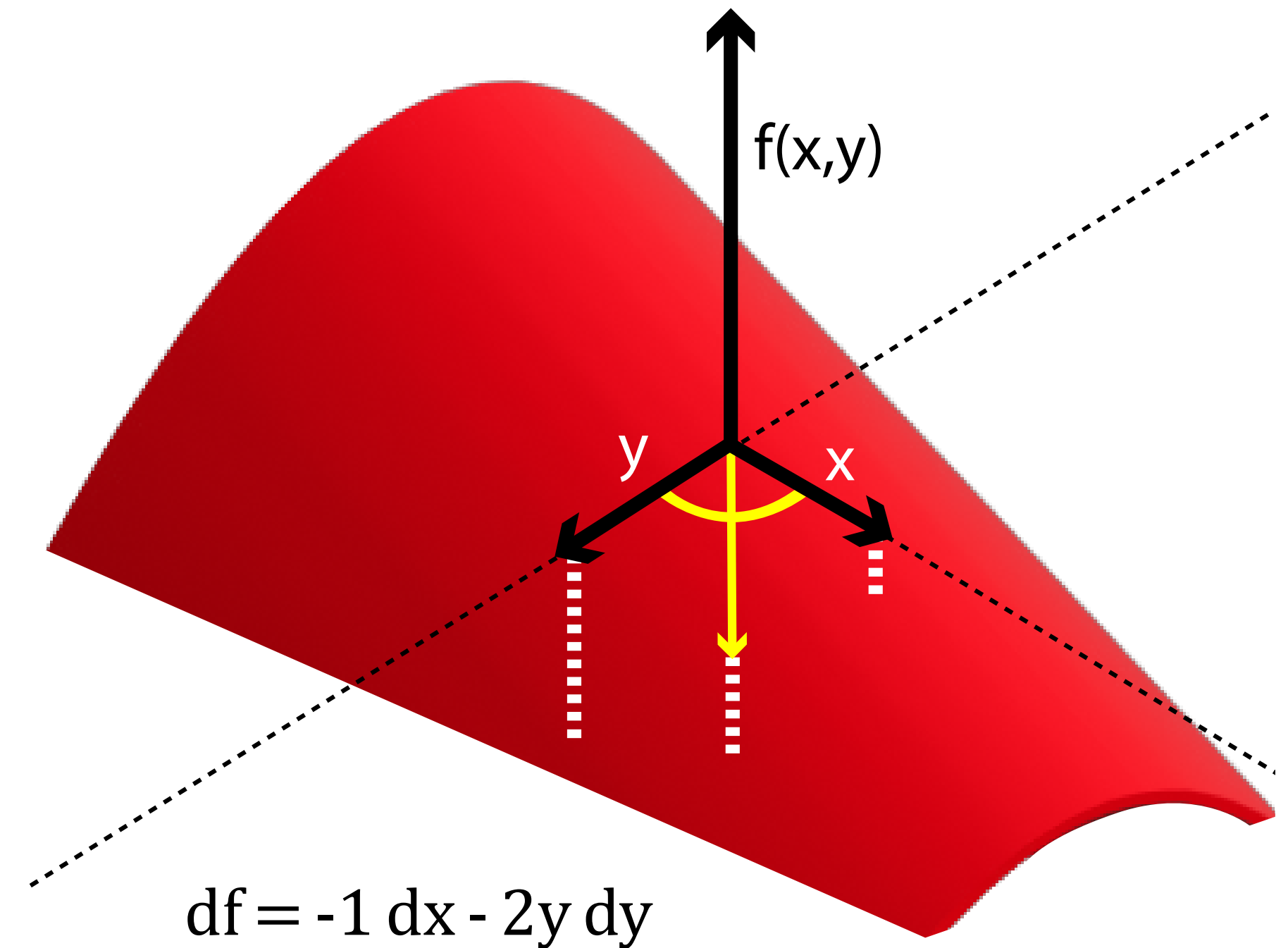
Totales Differenzial

Naheliegend aber falsch: $dx=1$ und $dy=1$ und damit

$$df = -1 \cdot 1 - 2y \cdot 1 = -1 - 2y$$

Das Problem ist, dass wir mit diesen Werten weiter laufen, als wenn wir nur $dx=1$ oder $dy=1$ setzen.

Wie groß ist die Laufweite und wie können wir sie auf den Wert 1 normieren?



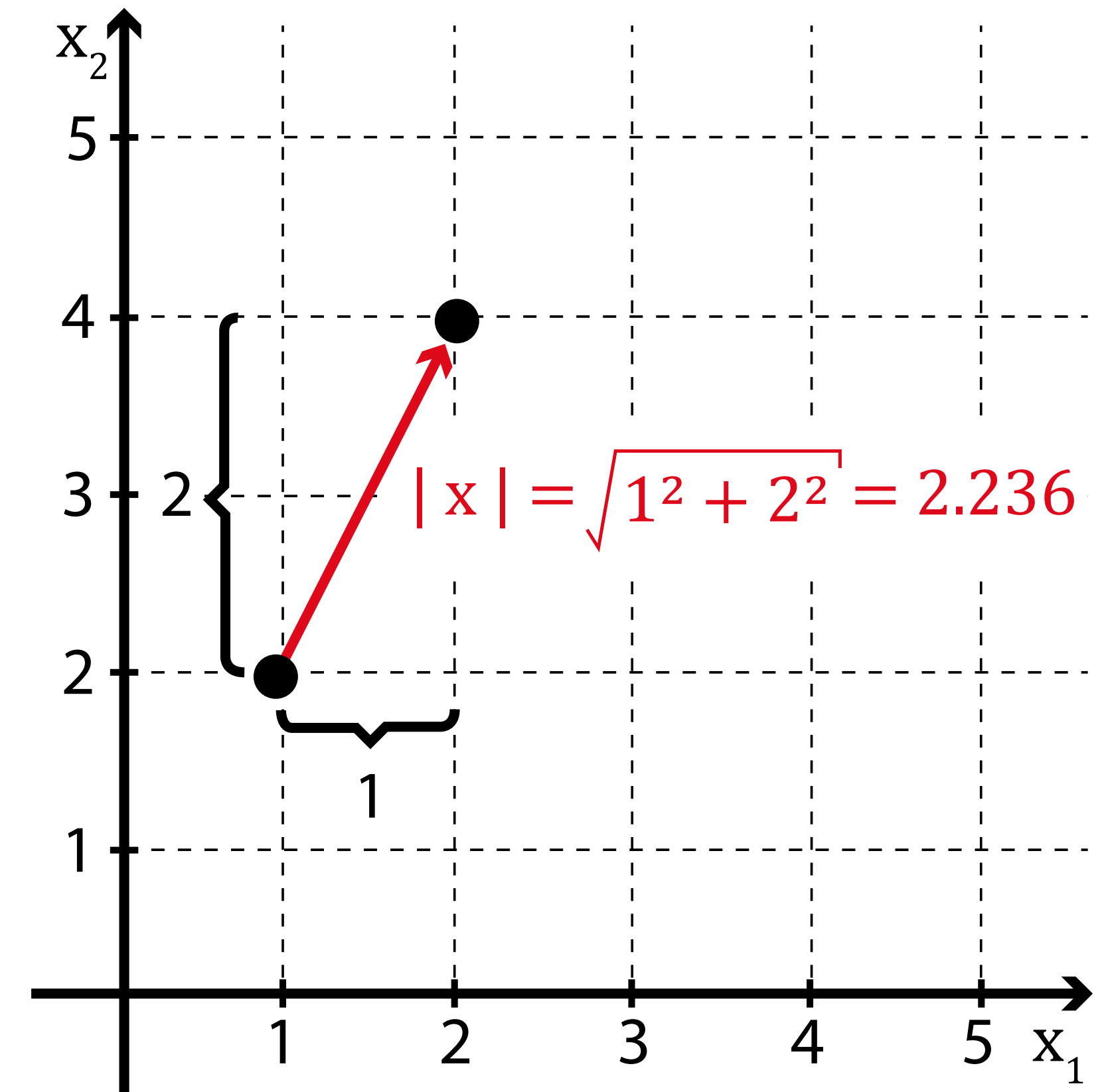
Vektornormen

Eine Norm für einen Vektorraum ist eine Abbildung, die jedem Vektor aus diesem Vektorraum eine reelle Zahl zuordnet.

$$|x| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Für unsere Zwecke verwenden wir die euklidische Norm. Ist x ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$, dann ist die euklidische Norm:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$



Vektornormen

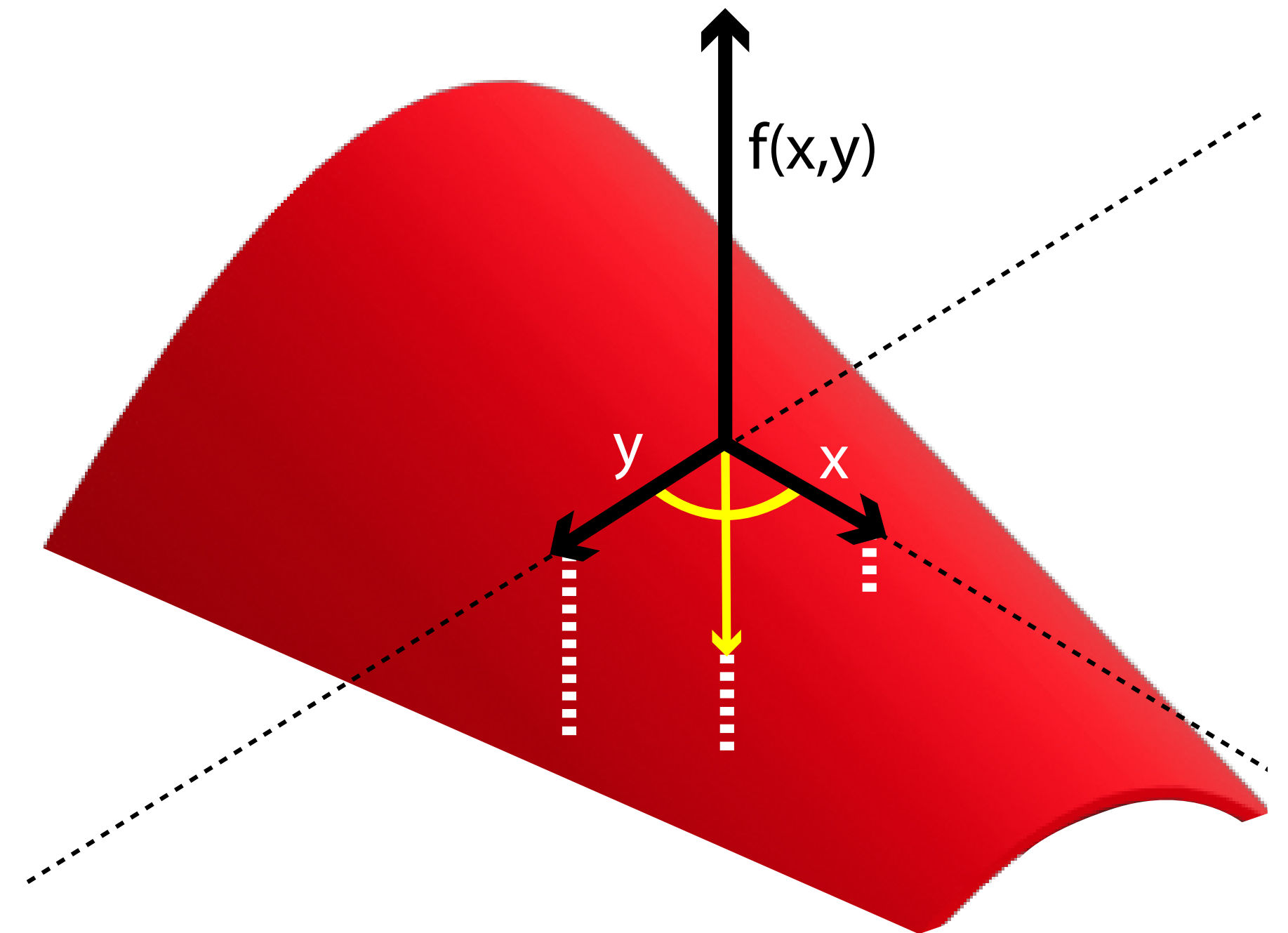
Für die Berechnung der Steigung in Richtung der Winkelhalbierenden müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

Richtung

$$dx = dy$$

Normierung auf 1

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = 1$$



Vektornormen

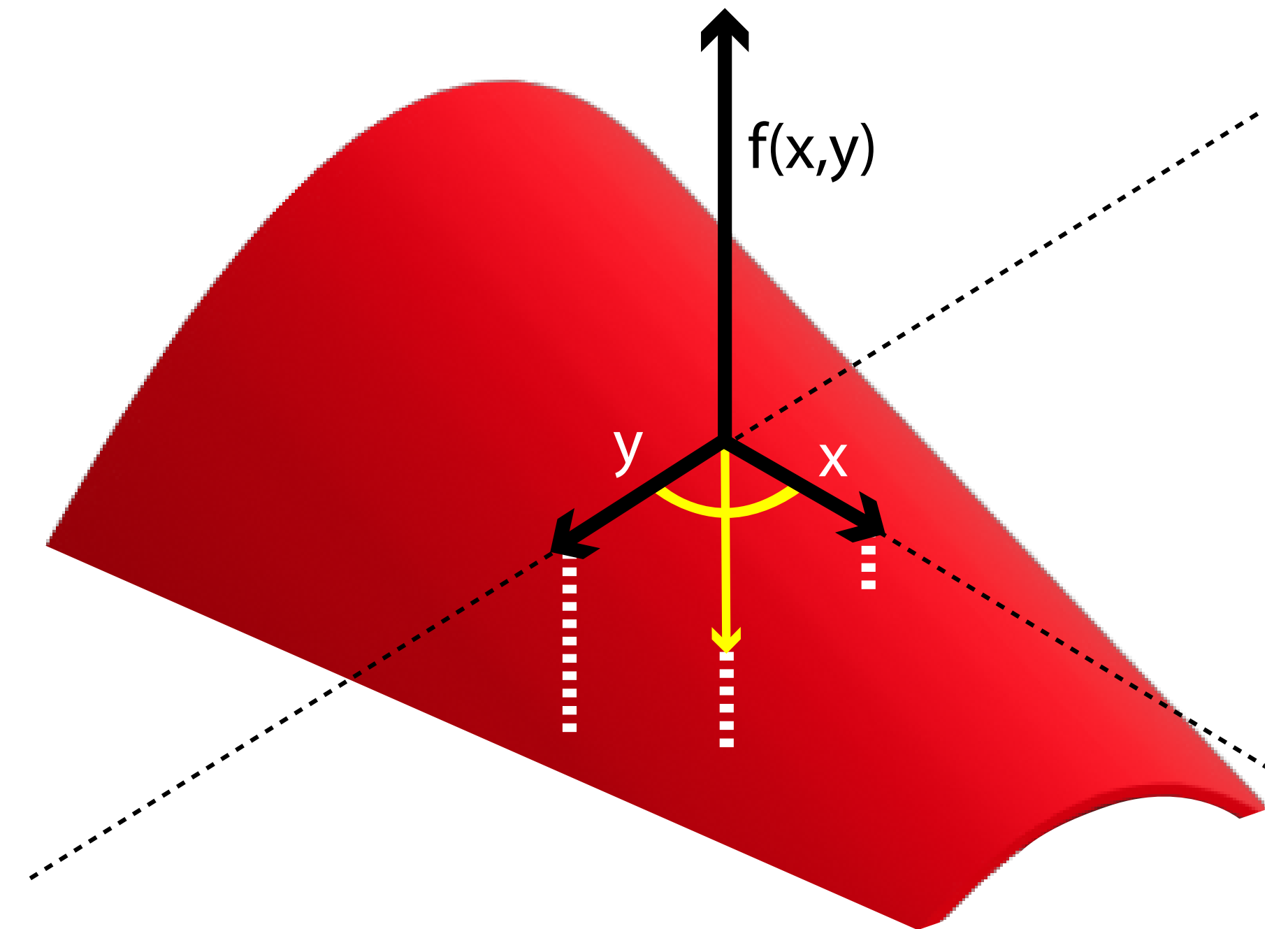
Mit folgender Rechnung erhalten wir $dx = dy = 0.5^{0.5}$

$$\left| \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right| = \sqrt{dx^2 + dy^2} \stackrel{!}{=} 1 \quad | \quad dx=dy$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2 \, dx^2} = 1 \quad | \, (\dots)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \, dx^2 = 1 \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow dx = \sqrt{0.5}$$



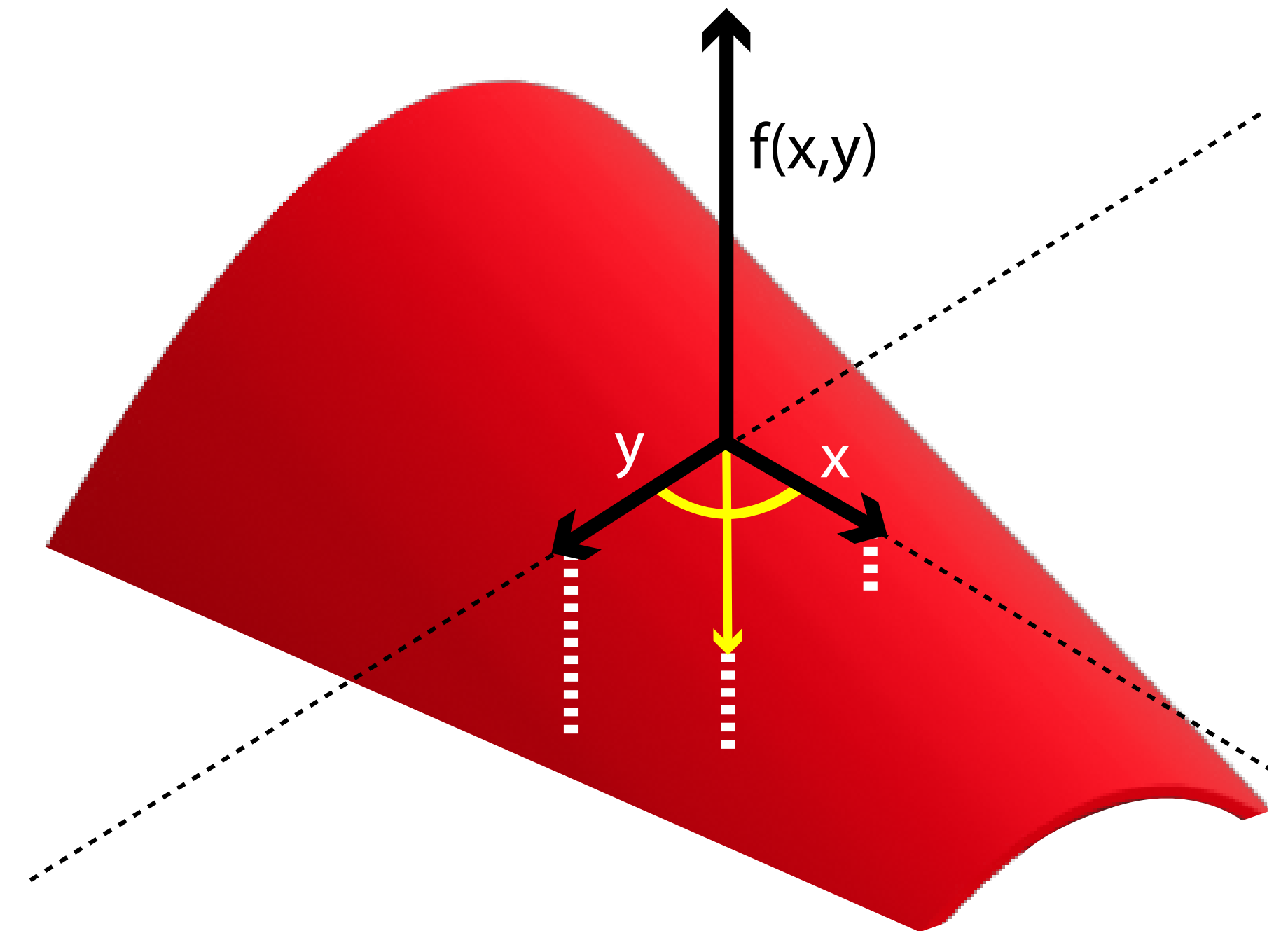
Totales Differenzial

Damit können wir auch unsere Steigung berechnen ...

$$df = -1 \cdot \sqrt{0.5} - 2y \cdot \sqrt{0.5} = -\sqrt{0.5} (1 + 2y)$$

...und haben die **Richtungsableitung** kennengelernt! Diese ist eine Verallgemeinerung der partiellen Ableitung.

Statt nach einer Variable abzuleiten können wir nach einem beliebigen normierten Vektor ableiten!



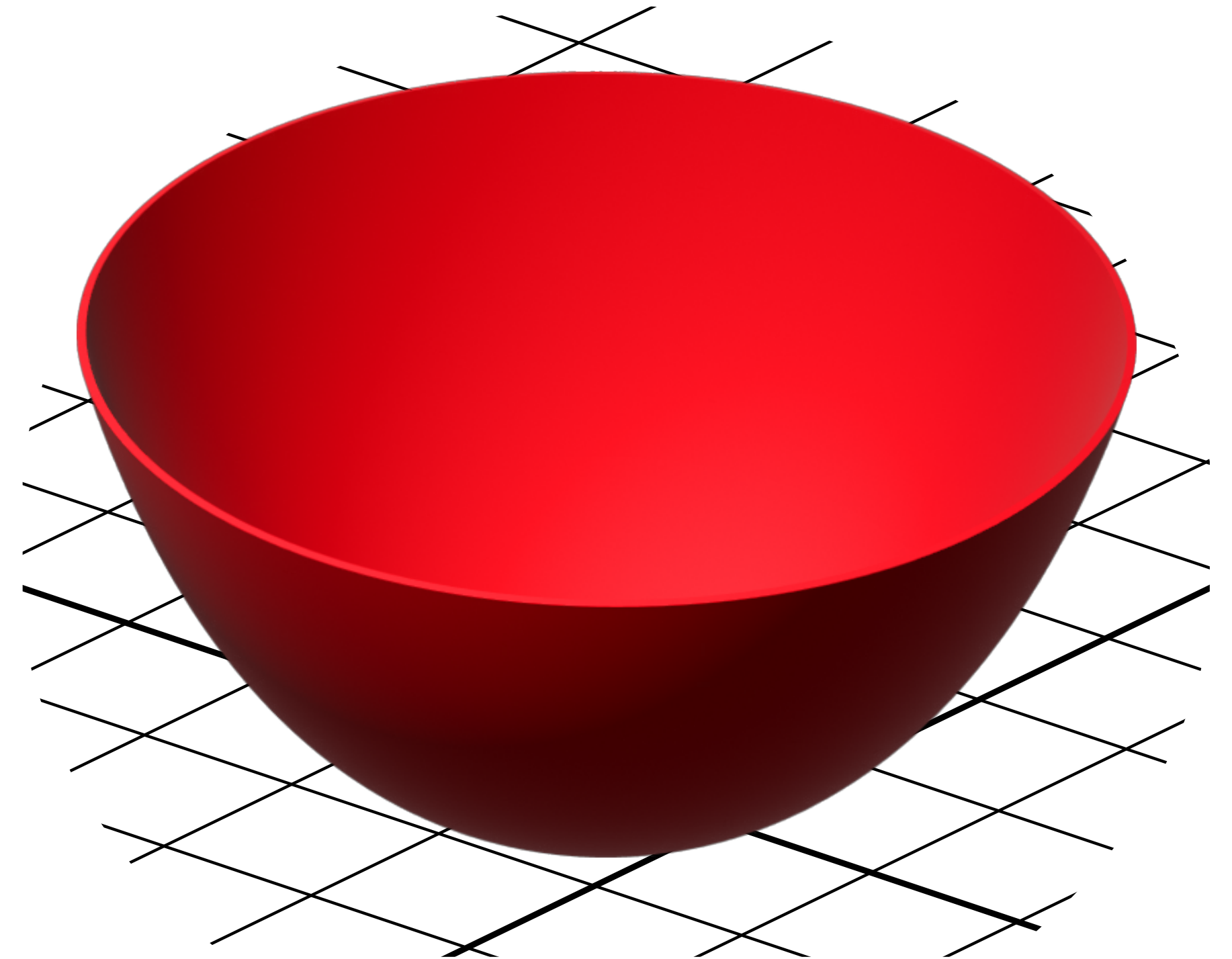
Totales Differenzial

Berechne das totale Differenzial der folgenden Funktionen und berechne die Steigung an der Stelle (2,1) in Richtung x und y!

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$h(x,y) = xy + x + y$$



Totales Differenzial

$$f(x) = x^2 + y^2$$

$$df = 2x \, dx + 2y \, dy$$

$$f'_x(2,1) = 4$$

$$f'_y(2,1) = 2$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$dg = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy$$

$$g'_x(2,1) = 2/\sqrt{5}$$

$$g'_y(2,1) = 1/\sqrt{5}$$

$$h(x) = xy + x + y$$

$$dh = (y+1) \, dx + (x+1) \, dy$$

$$h'_x(2,1) = 2$$

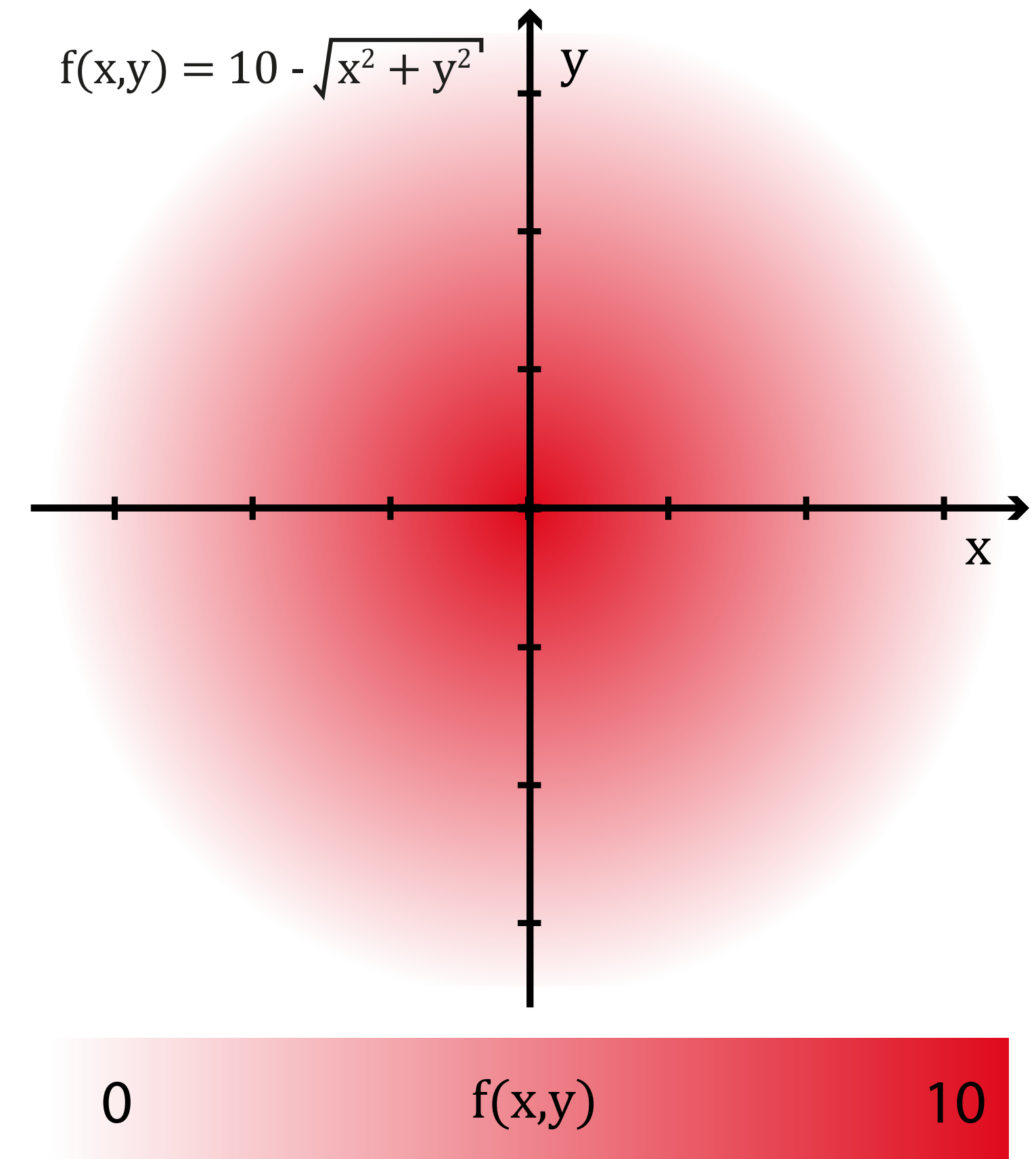
$$h'_y(2,1) = 3$$

Skalarfelder

Sei $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Funktion, die jedem Element eines Vektorraumes einen Skalar zuordnet:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

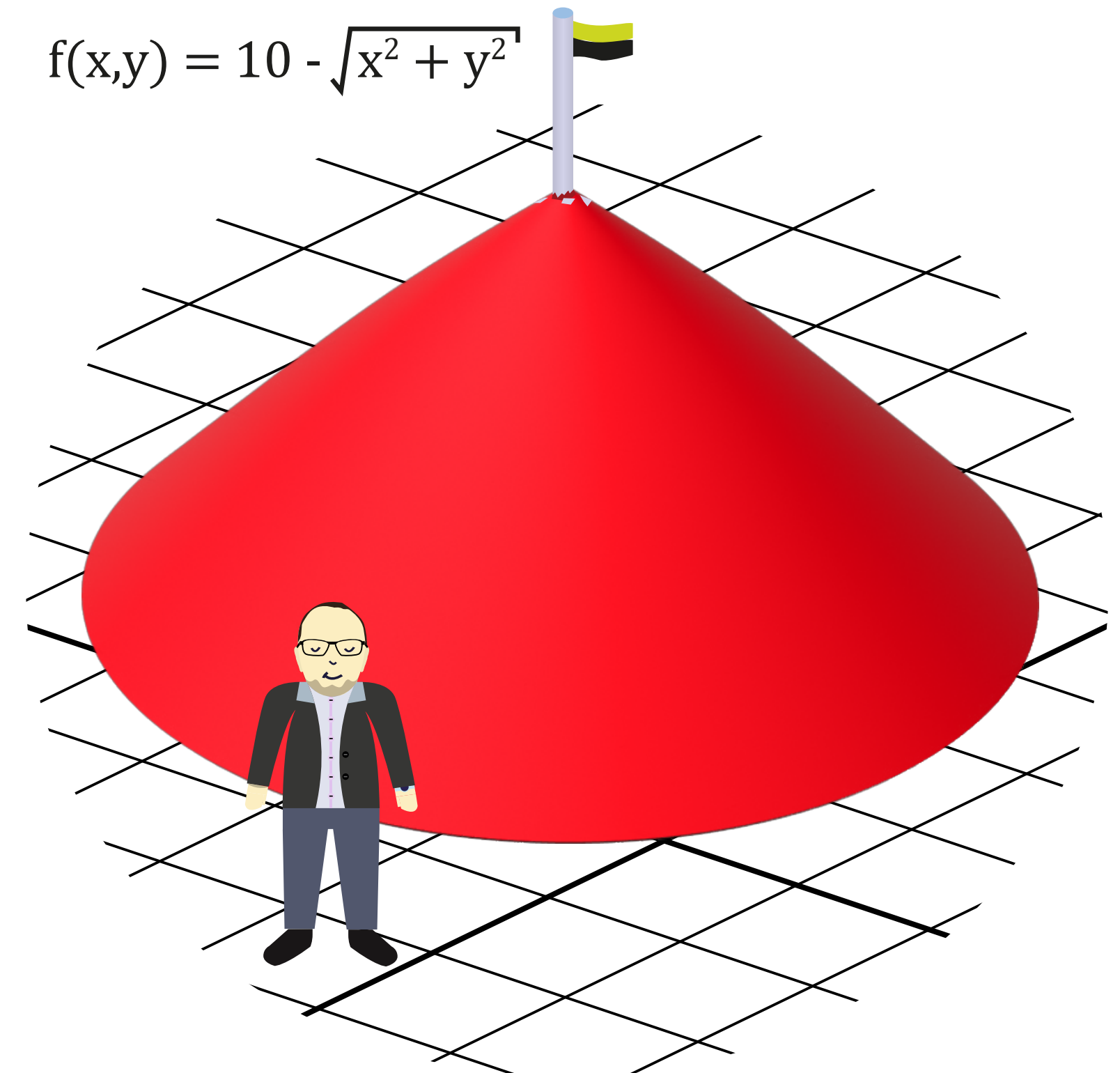
Wir bezeichnen diese Funktion auch als **Skalarfeld**. Skalarfelder die auf $I \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert sind können wir als Heatmap oder Konturplot visualisieren.



Gradient

Die Richtungsableitungen geben uns die Steigung an, wenn wir in einem Skalarfeld von einem Punkt aus in eine bestimmte Richtung gehen.

Oft interessiert uns aber nicht die Steigung in jede x-beliebige Richtung, sondern die Richtung mit der größten Steigung!



Gradient

Wir definieren den **Gradienten** einer Funktion als Vektor, der alle partiellen Ableitungen einer Funktion enthält.

Der "grad(...)" Operator ist, wie rechts gezeigt, äquivalent zum **Nabla Operator** ∇ .

Beispiel: Wir berechnen den Gradienten von:

$$f(x,y) = 10 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

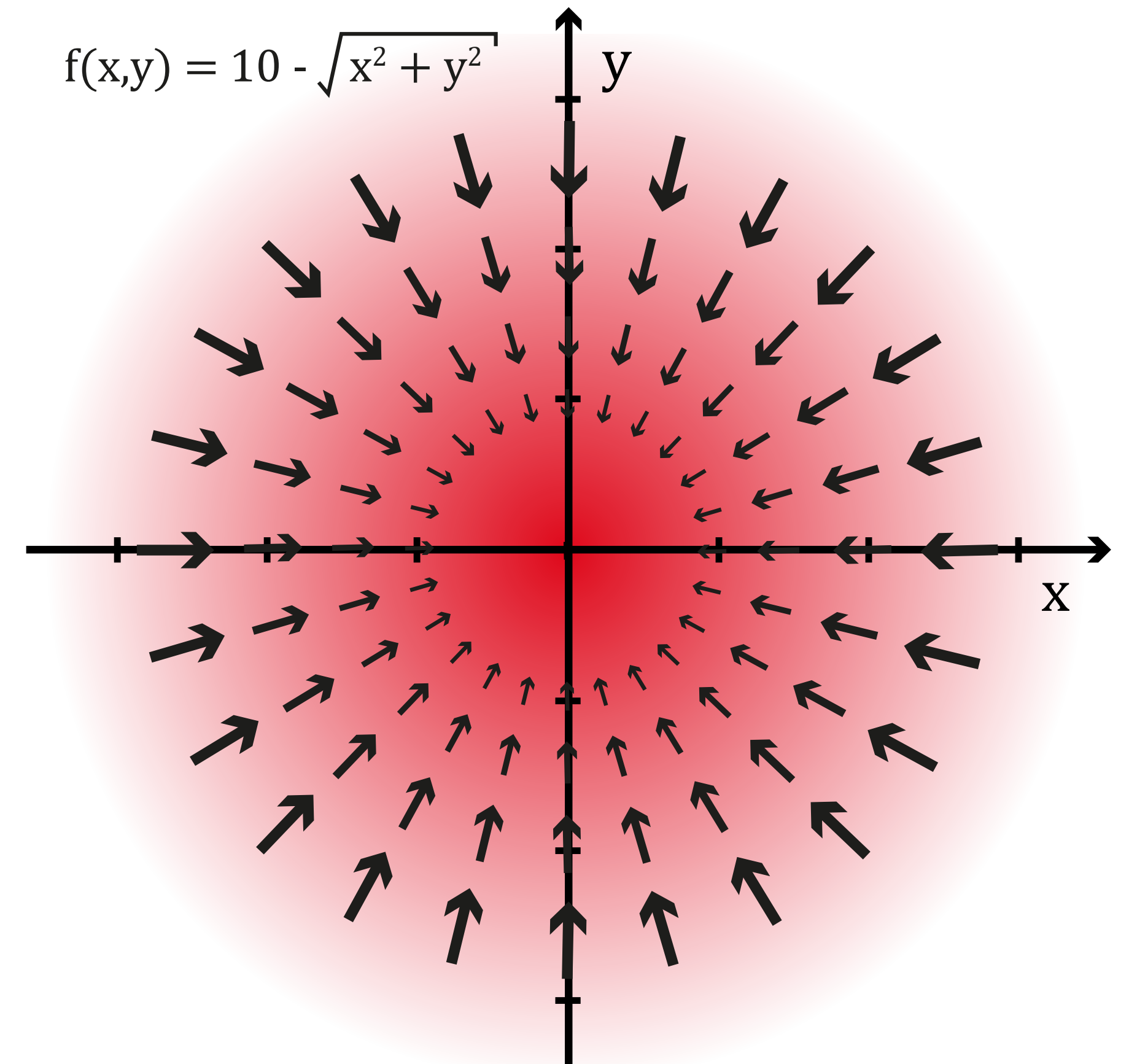
$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient

Wir erhalten den Gradientenvektor:

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}$$

Die Richtung des Vektors zeigt in Richtung des größten Anstiegs und über die Länge erhalten wir auch den Betrag dieses Anstiegs!



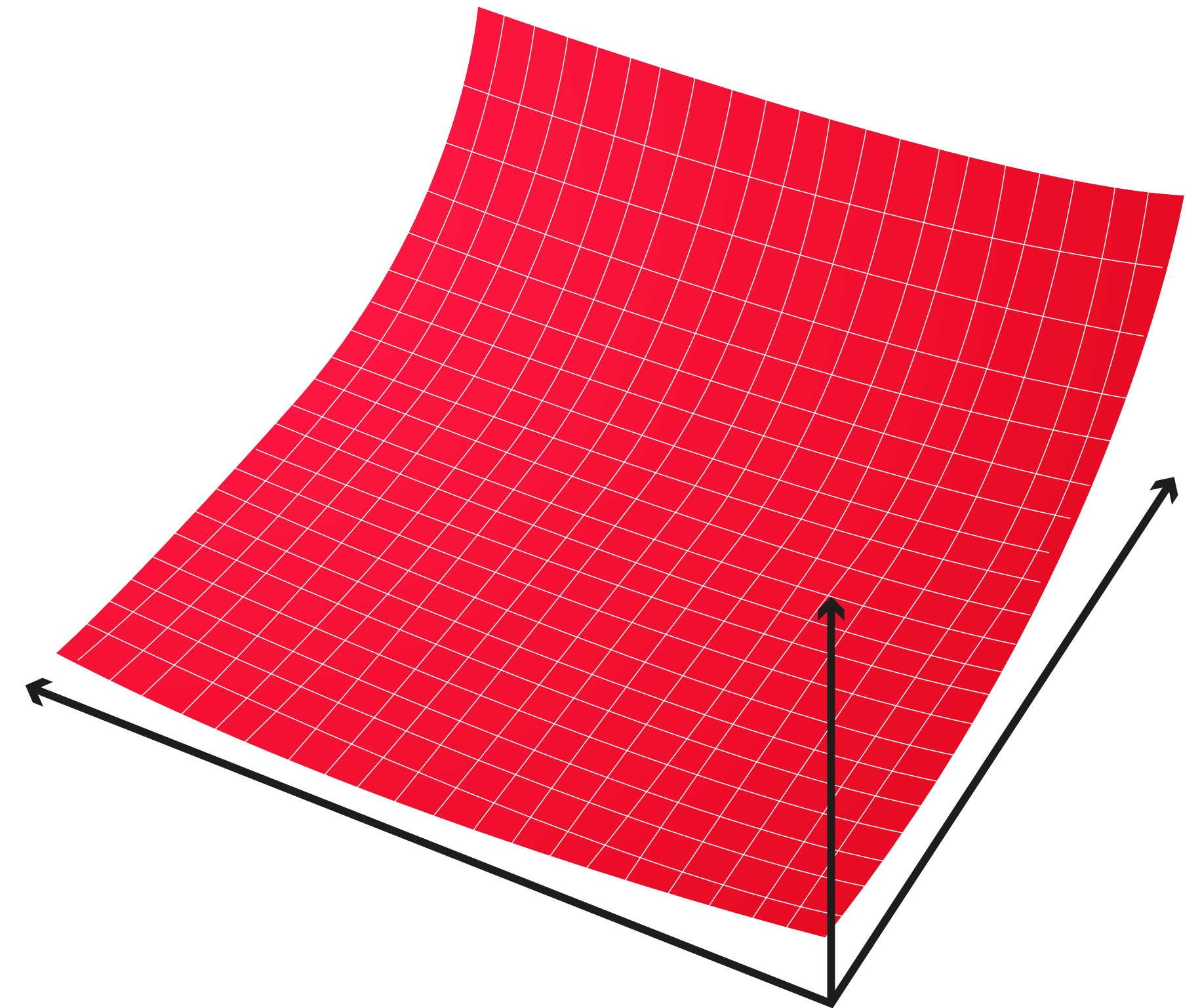
Gradient

Berechne den Gradienten der folgenden Funktionen und berechne Richtung und Betrag der höchsten Steigung an der Stelle ...

$$f(x,y) = x^2 + e^y \quad x = 2, y = \ln(3)$$

$$g(x,y) = x^2y - y^3 \quad x = 2, y = 2$$

$$h(x,y) = xy + x + y \quad x = 5, y = 7$$



$$f(x,y) = x^2 + e^y \quad \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 2x \\ e^y \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtung bei } x=2, y=\ln(3) \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Betrag} \quad \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$g(x,y) = x^2y - y^3 \quad \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtung bei } x=2 \text{ und } y=2 \quad \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Betrag} \quad \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64 + 64} \approx 11.3$$

$$f(x,y) = xy + x + y \quad \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} y+1 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtung bei } x=5, y=7 \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

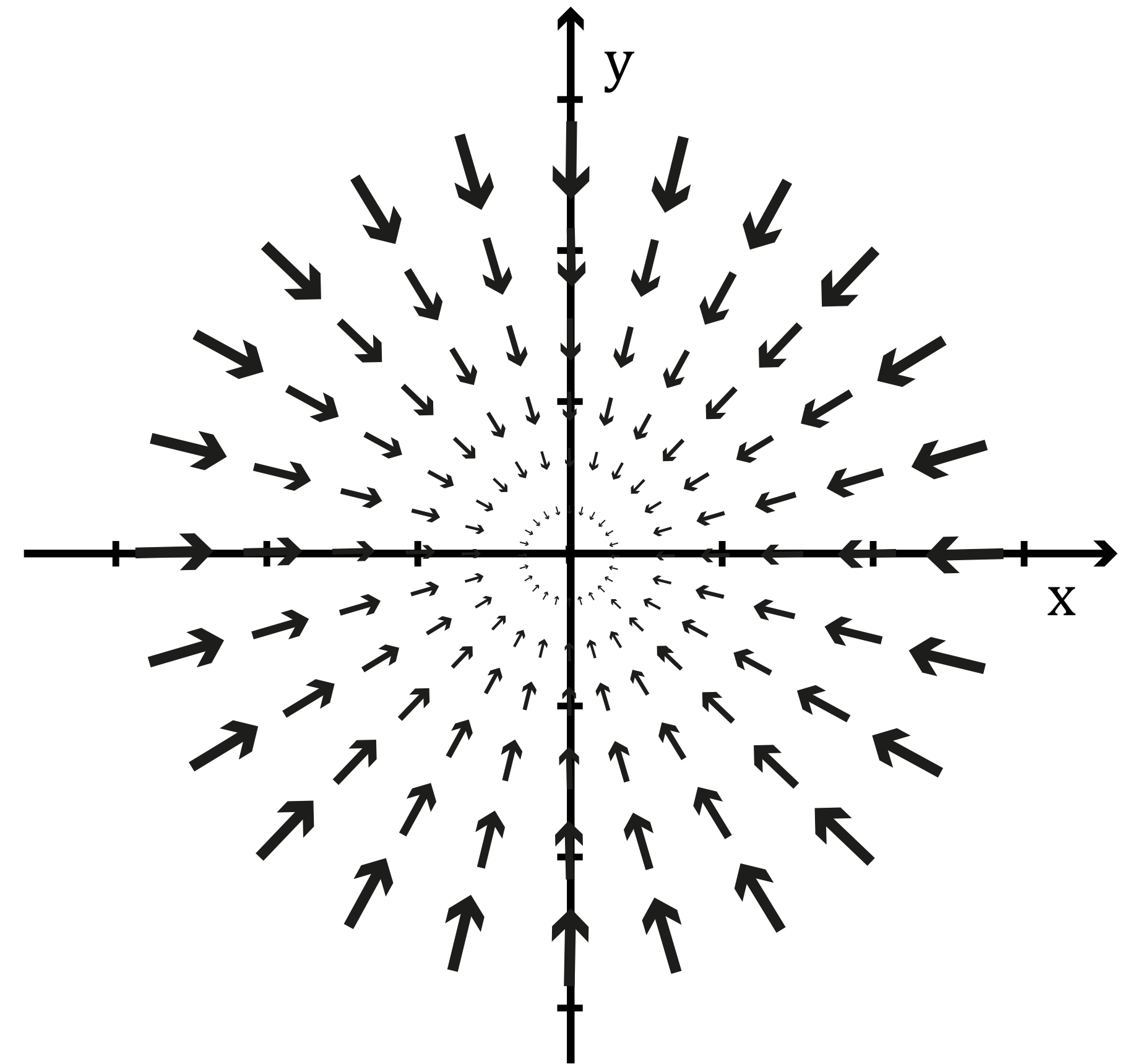
$$\text{Betrag} \quad \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64 + 36} = 10$$

Vektorfelder

Sei $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ eine Funktion, die jedem Element eines Vektorraumes einen Vektor zuordnet:

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Wir bezeichnen diese Funktion auch als **Vektorfeld**. Vektorfelder die von $I \subseteq \mathbb{R}^2$ auf $J \subseteq \mathbb{R}^2$ abbilden können wir wie rechts gezeigt visualisieren.



Divergenz

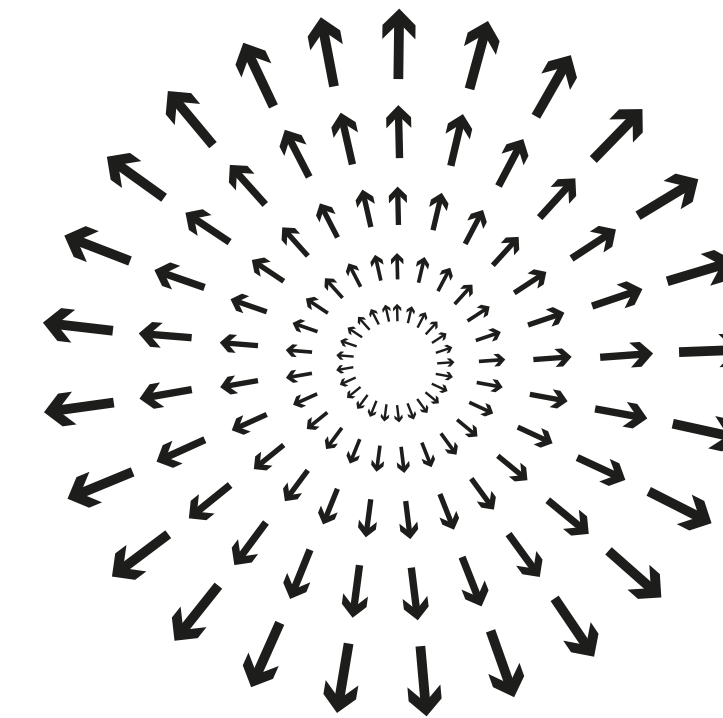
Die **Divergenz** ist das Skalarprodukt des Gradientenoperators mit dem Vektorfeld.

$$\text{div}(f) = \nabla \cdot f$$

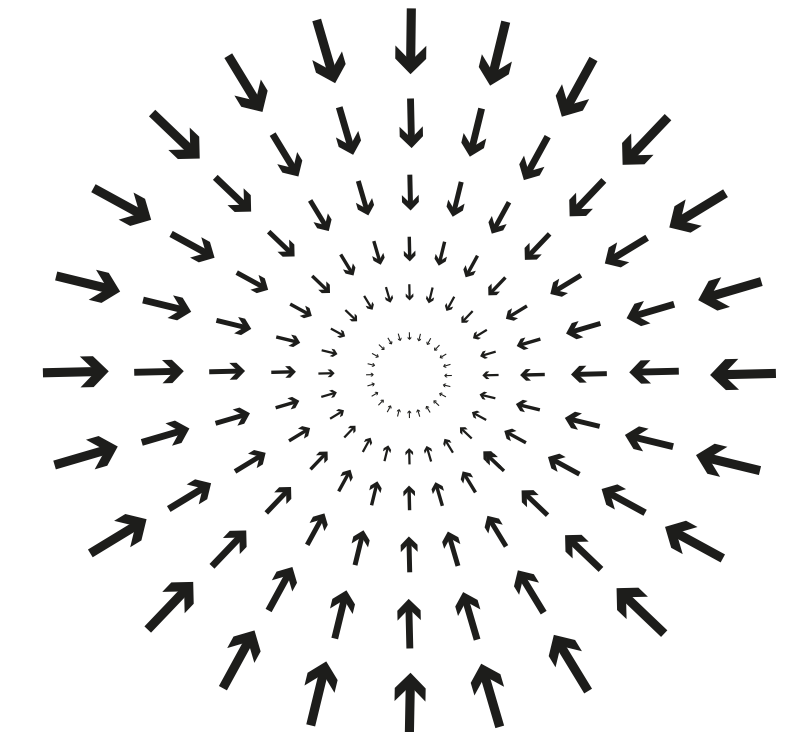
Die Divergenz gibt an, ob die Vektoren eines Vektorfelds f an einem bestimmten Punkt auseinander- oder zusammenlaufen.

Positive Werte bedeuten ein Auseinanderlaufen, negative Werte ein Zusammenlaufen und eine Divergenz von genau 0 bedeutet Quellenfreiheit.

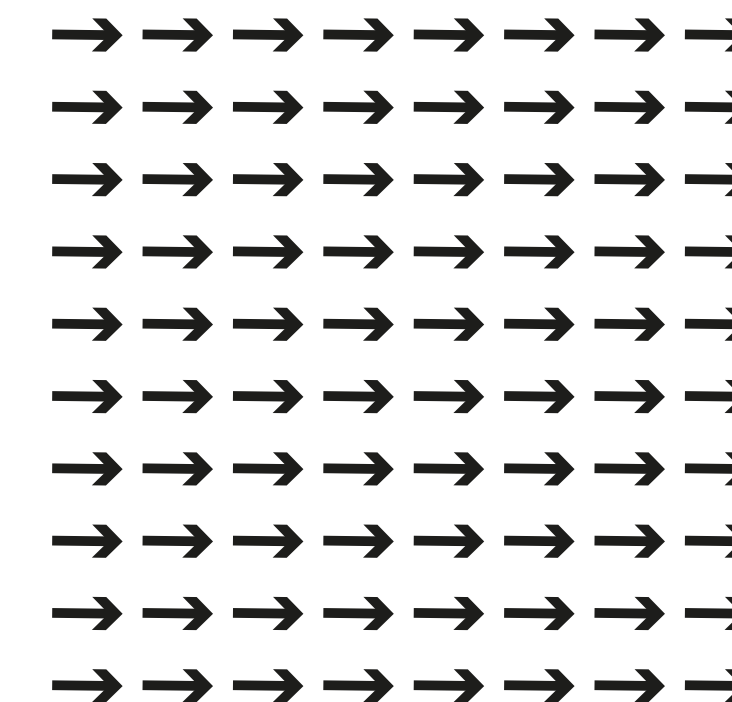
Quelle Divergenz ist positiv



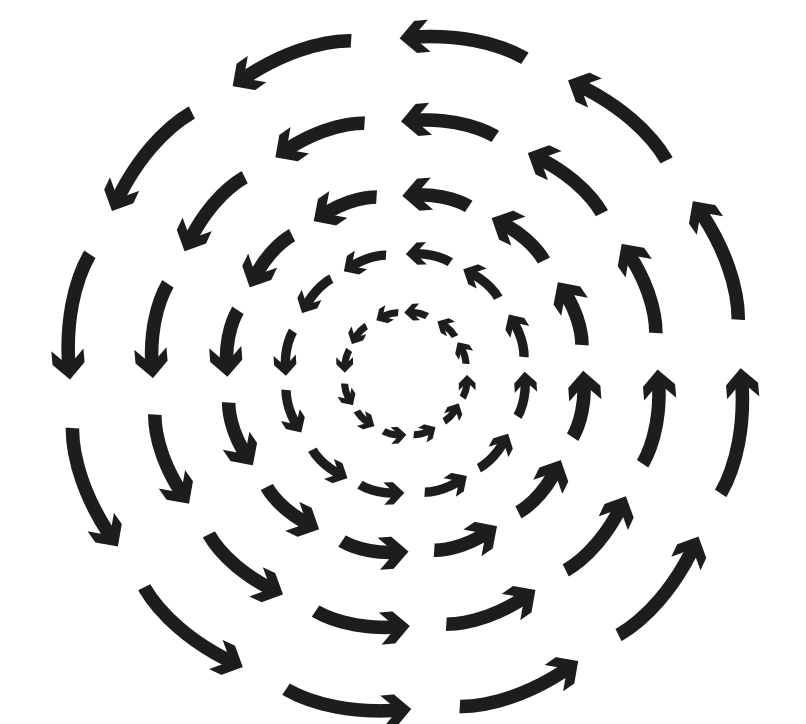
Senke Divergenz ist negativ



Parallelen Divergenz ist null



Wirbel Divergenz ist null

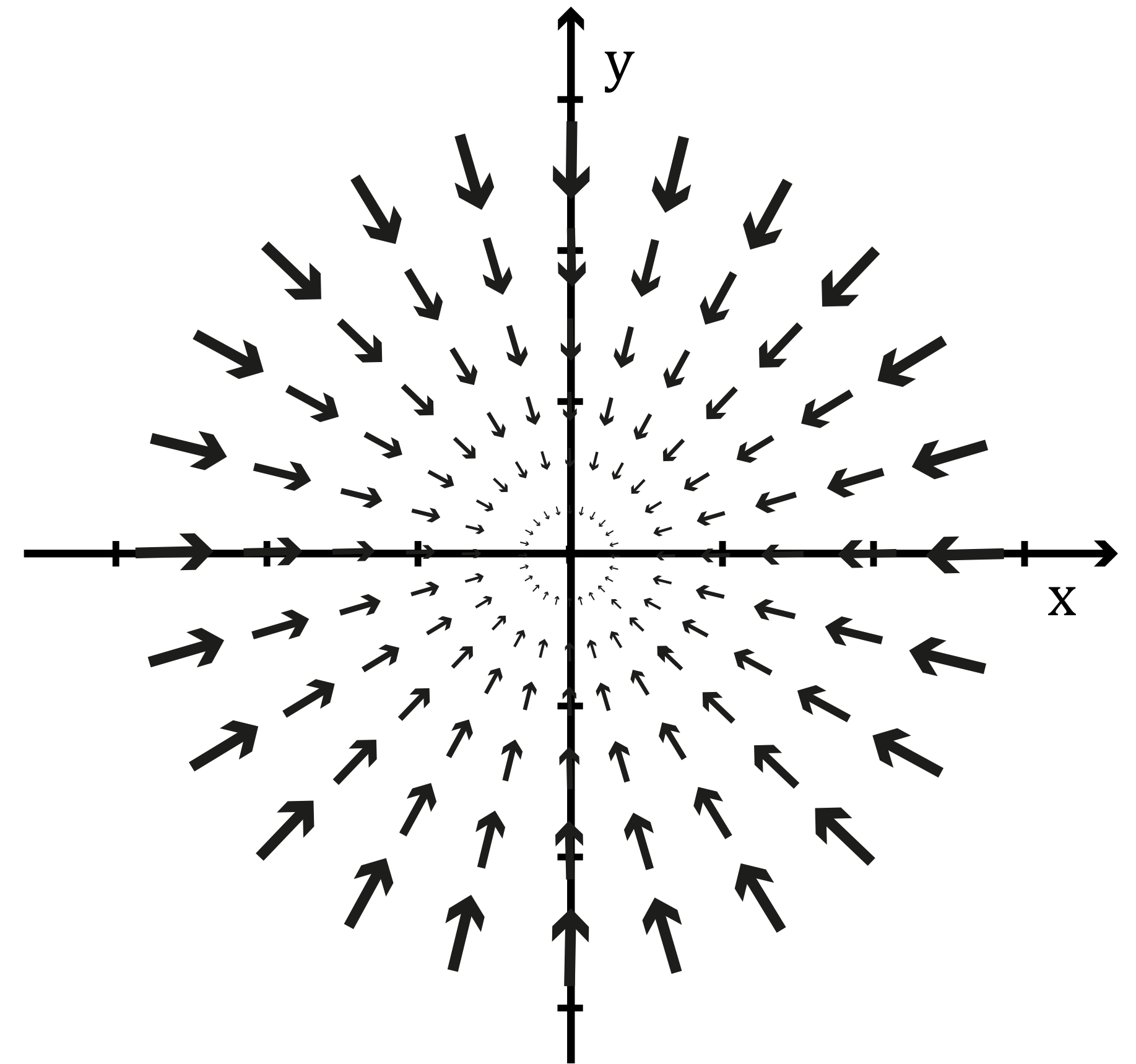


Divergenz

Als Beispiel verwenden wir:

$$\vec{f}(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^T$$

Bemerkung Diese Funktion war vor einigen Folien das Ergebnis von $\text{grad}(f)$. Der Gradient eines Skalarfeldes ist ein Vektorfeld!



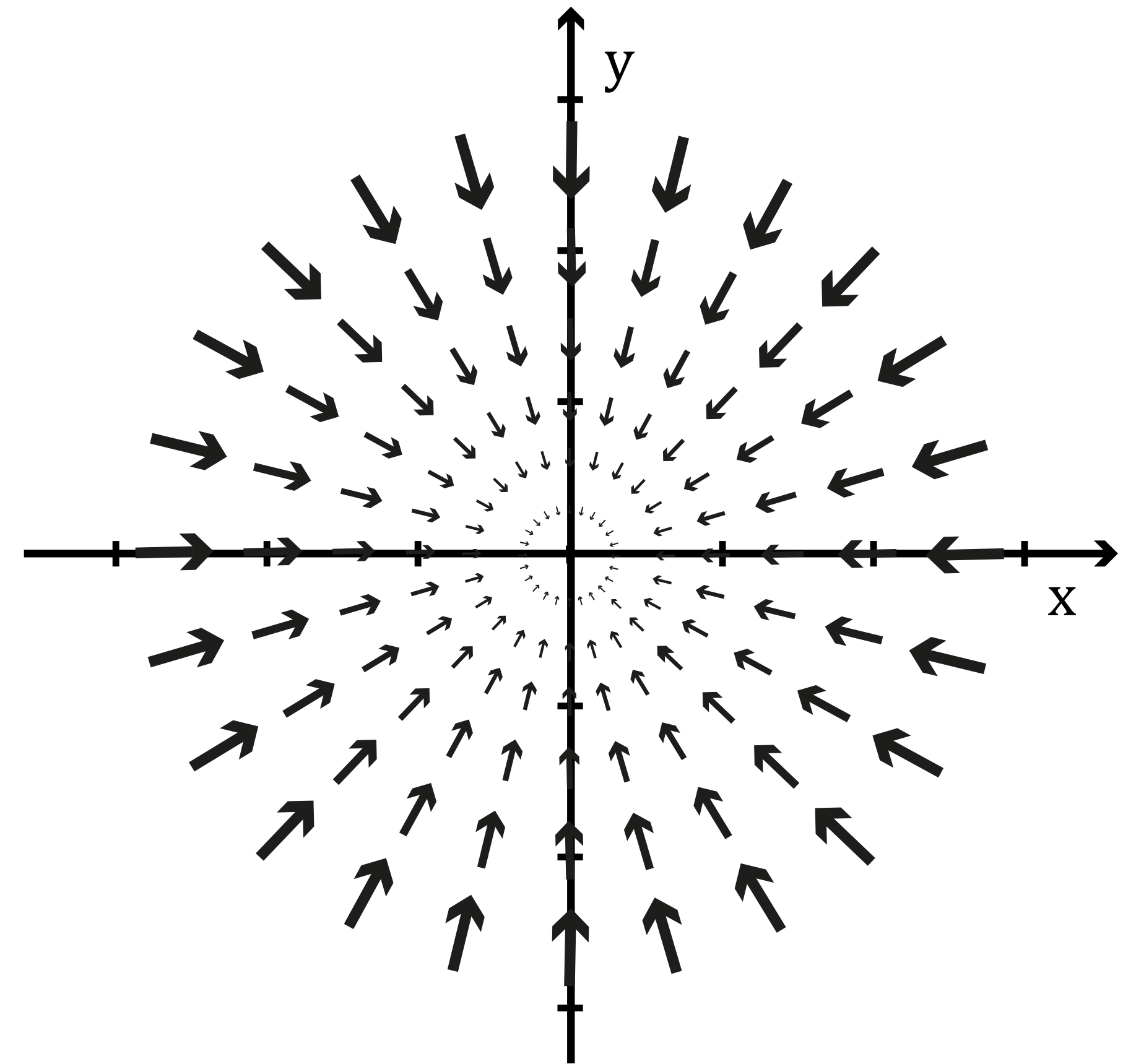
$$\vec{f}(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^T$$

$$\operatorname{div}(\vec{f}(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^T$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{-y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{-x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

$$= \frac{-x^2 - y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



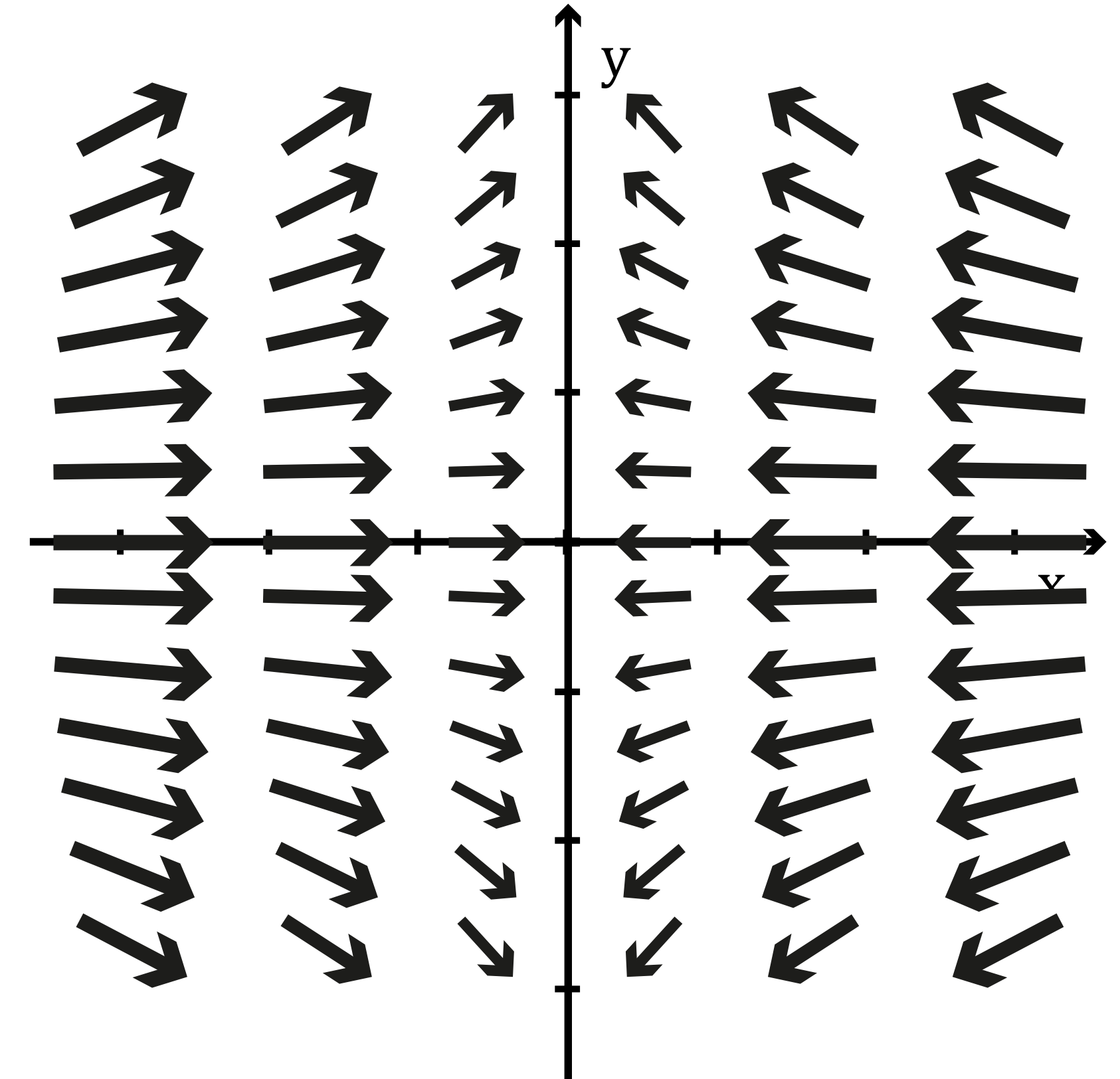
Divergenz

Berechne die Divergenz der folgenden Vektorfelder.

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} -y & , & x \end{pmatrix}$$

$$\vec{h}(x,y) = \begin{pmatrix} -x & , & y^2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{f}(x,y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{g}(x,y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{h}(x,y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y^2 \end{pmatrix} \\ &= -1 + 2y\end{aligned}$$

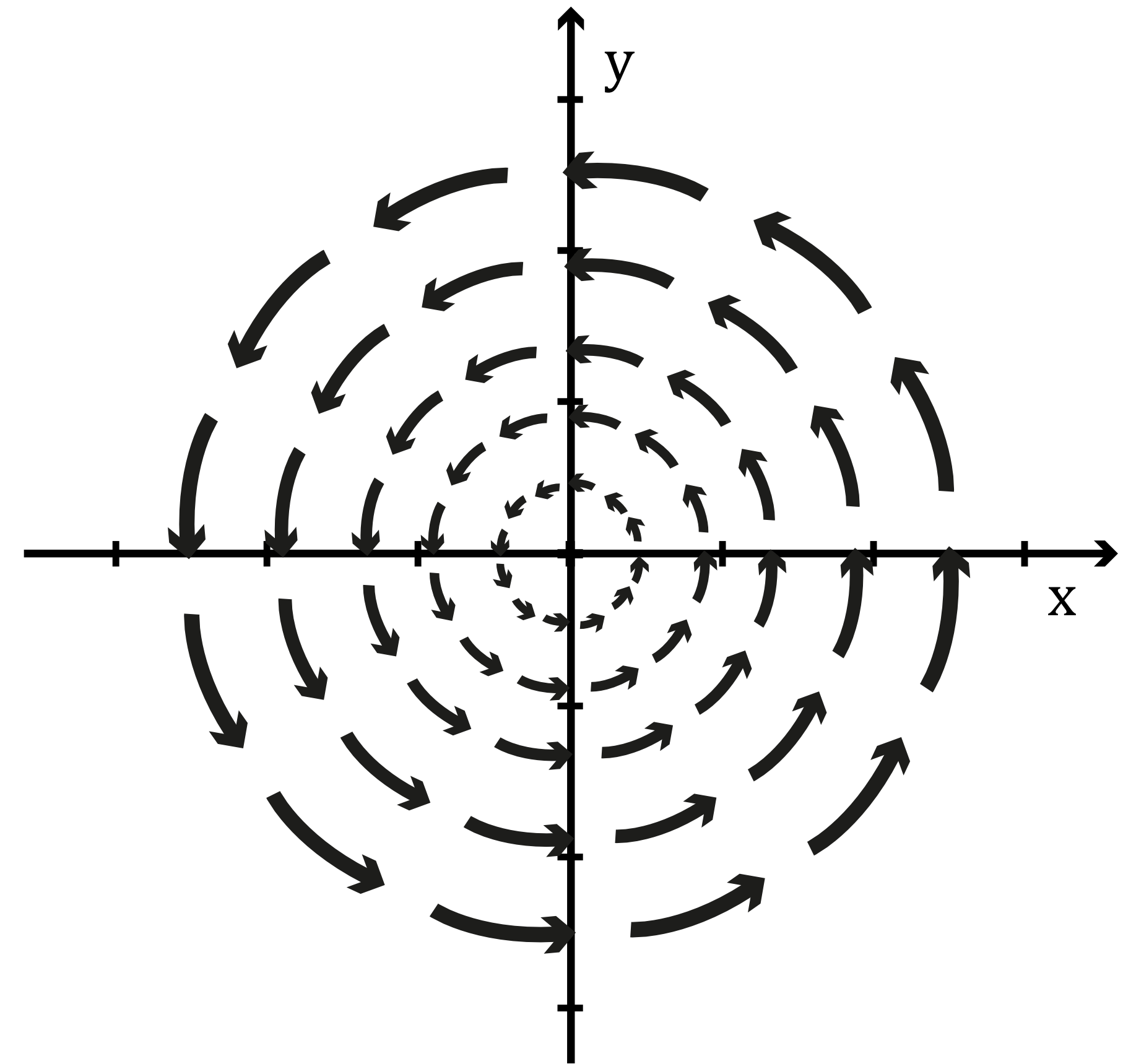
Rotation

Die **Rotation** ist das Kreuzprodukt des Gradientenoperators mit dem Vektorfeld.

$$\text{rot}(f) = \nabla \times f$$

Die Rotation gibt an, ob die Vektoren eines Vektorfelds f an einem bestimmten Punkt einen Wirbel bilden.

Eine Rotation von genau 0 bedeutet Wirbelfreiheit.

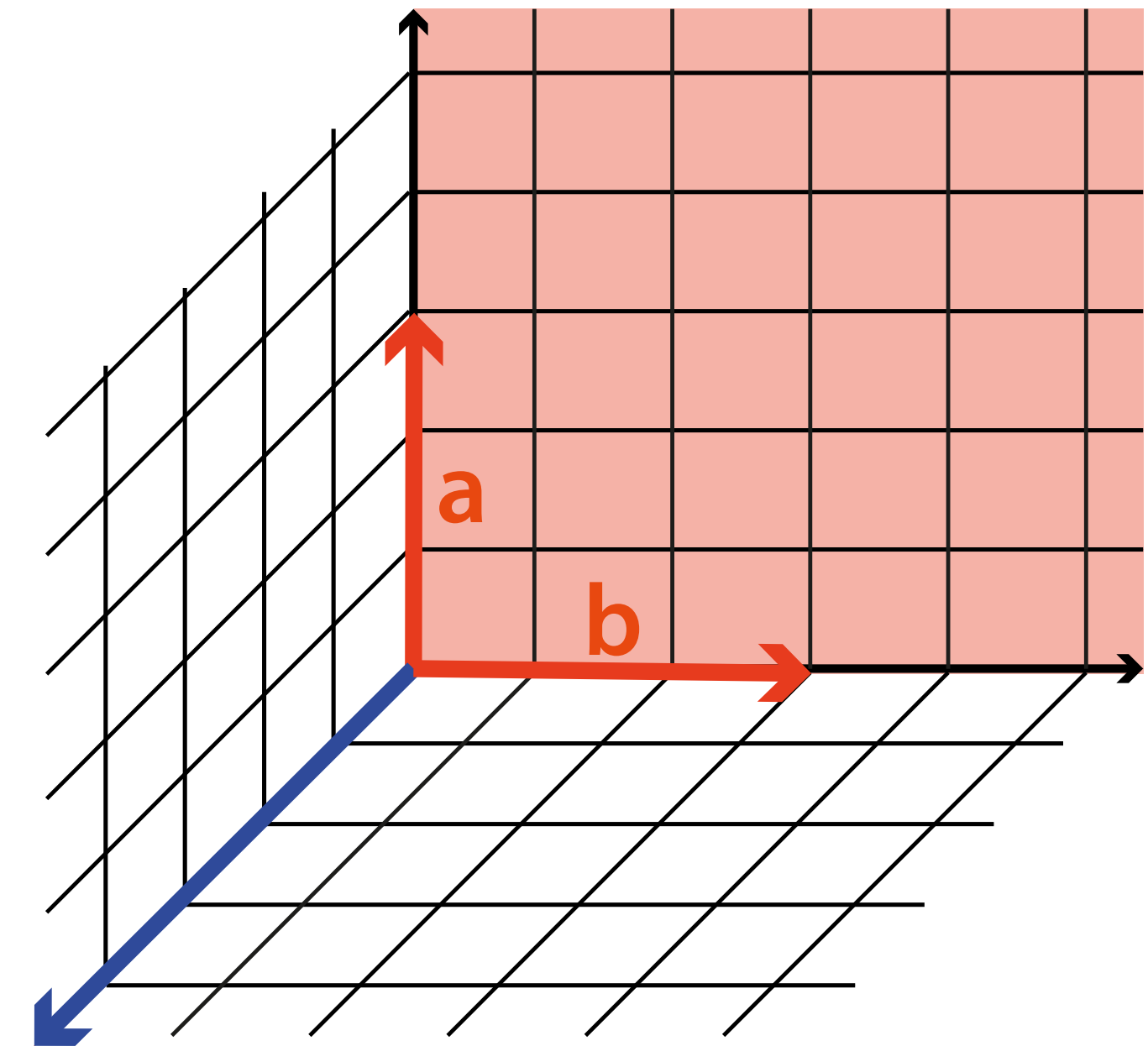


Rotation

Erinnerung: Das Kreuzprodukt ist im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ unterschiedlich definiert. Während wir im $\mathbb{R}^2$ einen Skalar erhalten, erhalten wir im $\mathbb{R}^3$ einen Vektor.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

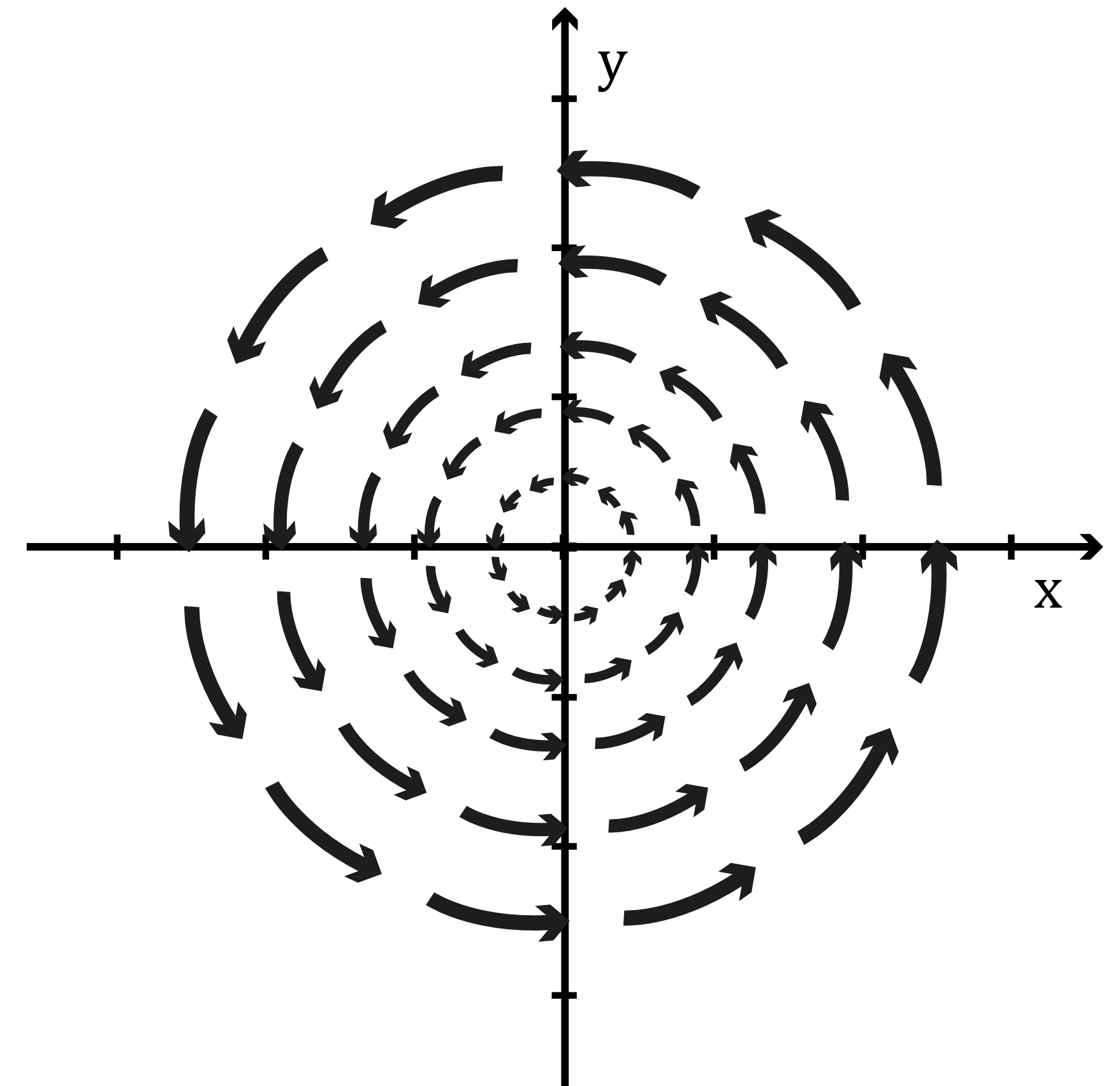


$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 9 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Rotation

Als Beispiel verwenden wir das Vektorfeld:

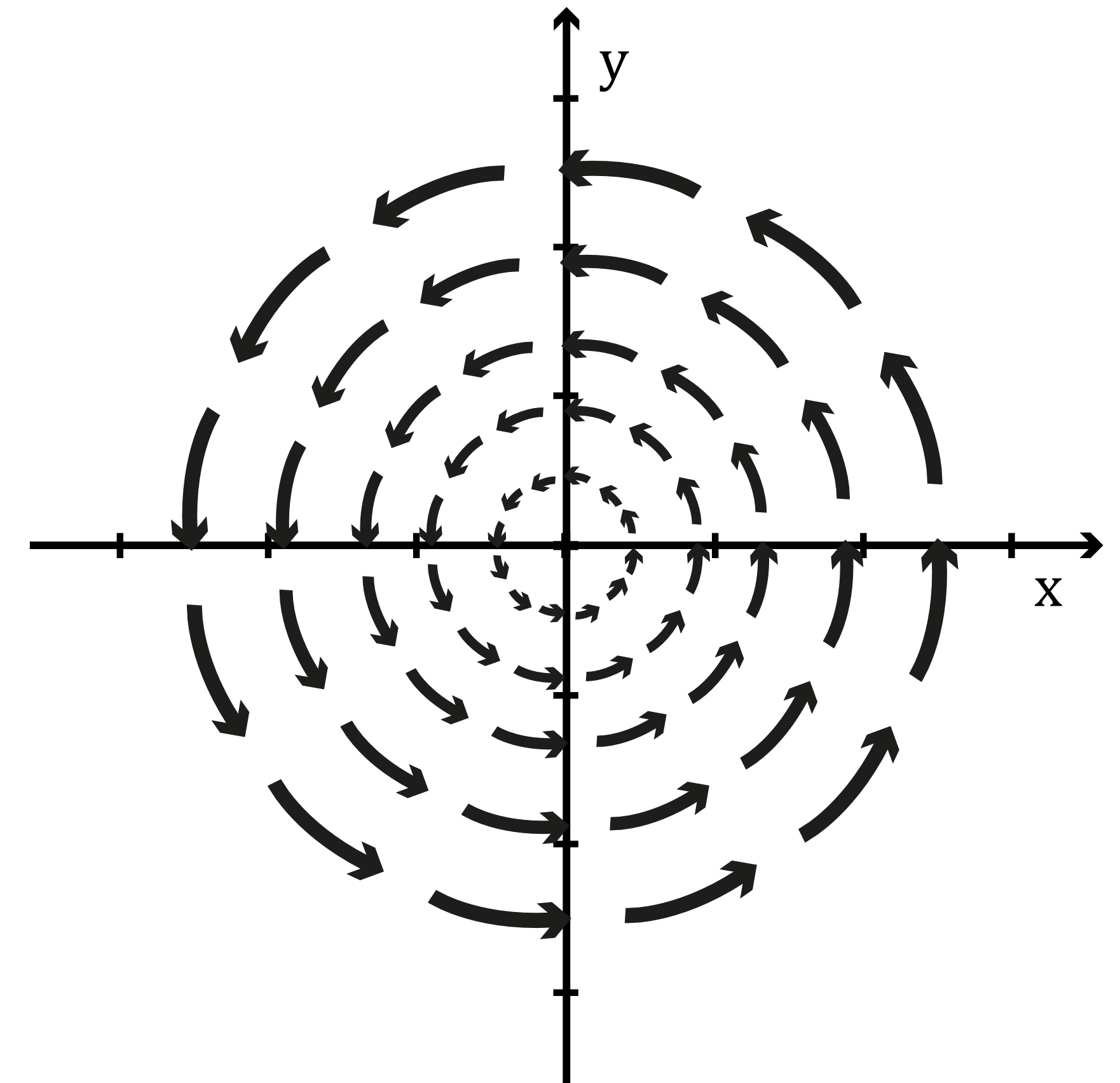
$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} -y & x \end{pmatrix}$$



Rotation

Wir erhalten eine konstante Rotation von 2

$$\begin{aligned}\text{rot}(\vec{g}(x,y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) = 2\end{aligned}$$



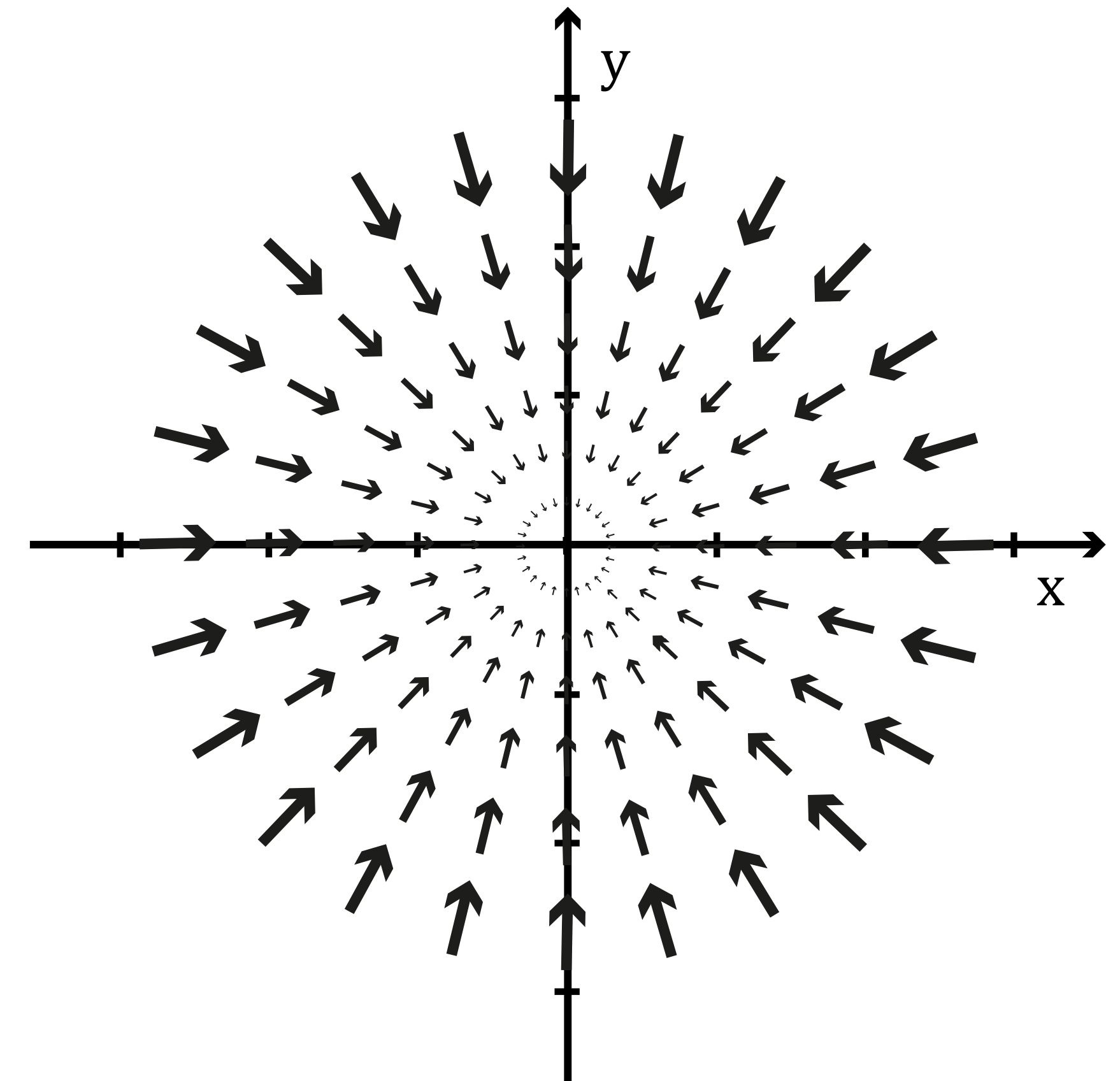
Rotation

Berechne die Rotation der folgenden Vektorfelder.

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} -x & , & y^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{h}(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} , \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$



$$\begin{aligned}\text{rot}(\vec{f}(x,y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} 1 - \frac{\partial}{\partial y} 1 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{rot}(\vec{g}(x,y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x \\ y^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} y^2 - \frac{\partial}{\partial y} (-x) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{rot}(\vec{h}(x,y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^T \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

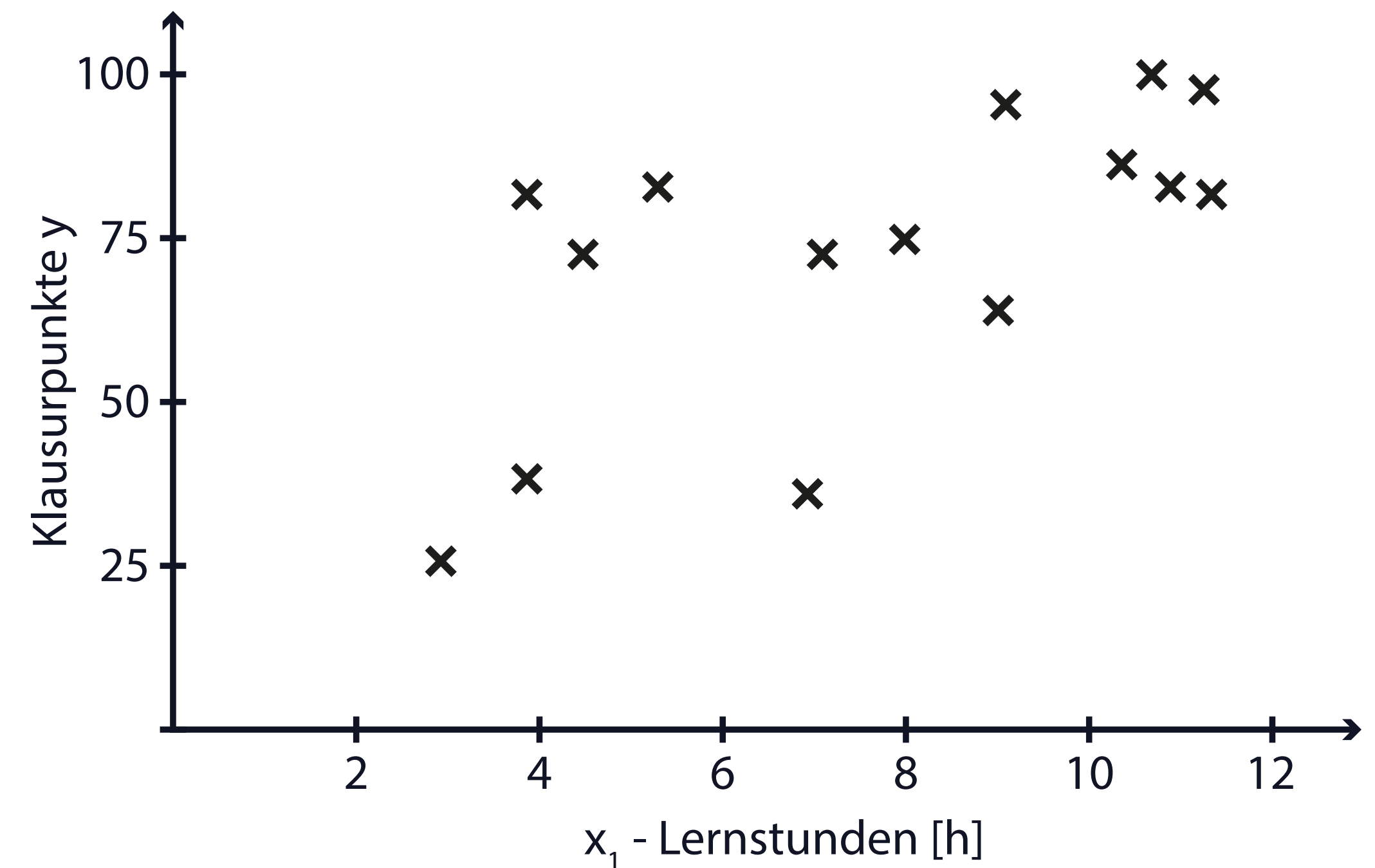
Relevanz für Data Science

Was haben die Konzepte Richtungsableitung, Gradient, Divergenz und Rotation mit Data Science zu tun?

Modelle erklären den Wert einer abhängigen Variable mit den Werten vieler unabhängigen Variablen.

Gängigstes Beispiel ist die lineare Regression:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \dots + \beta_n x_{i,n} + \varepsilon$$



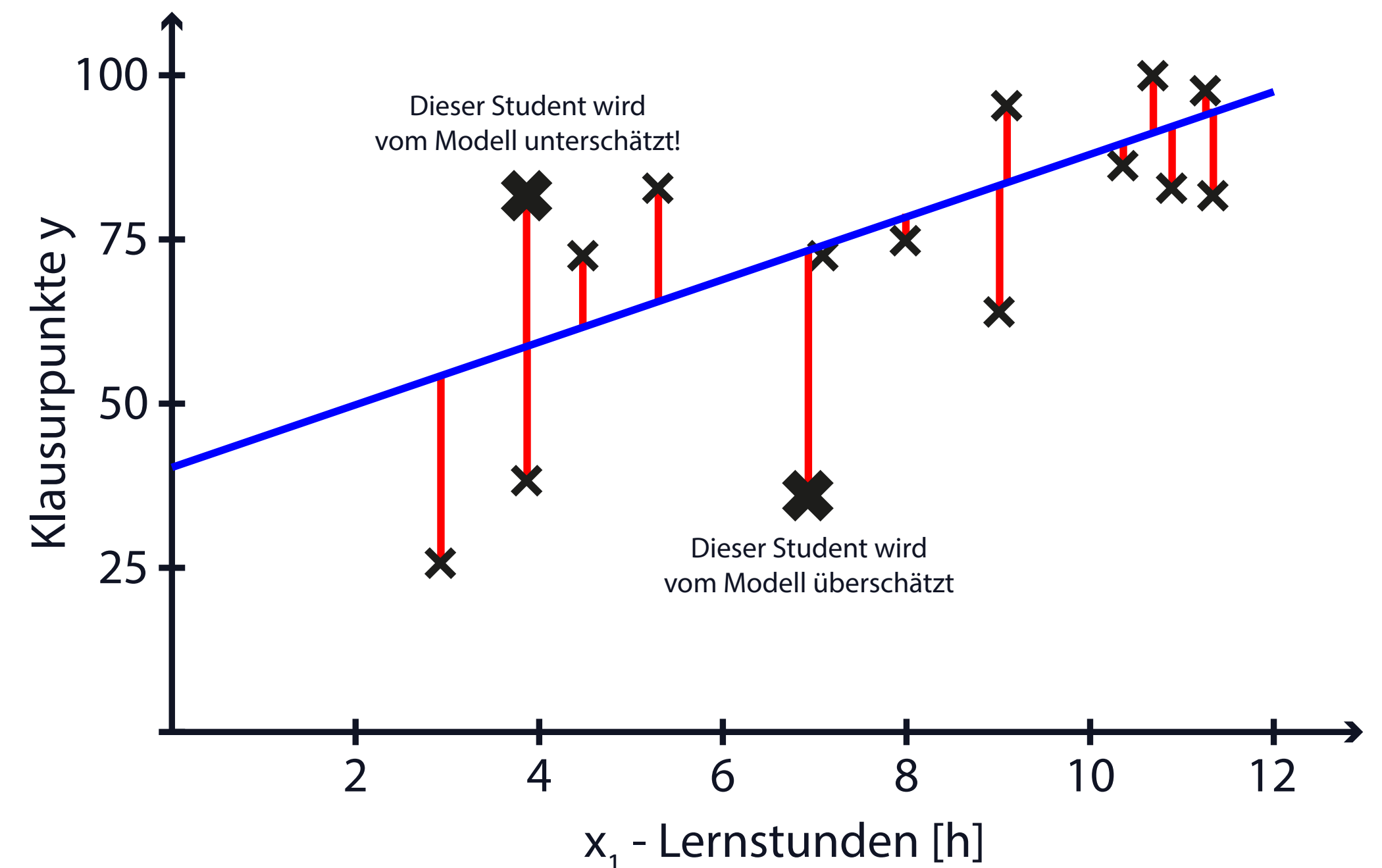
Relevanz für Data Science

Beim Fitten des Modells suchen wir Gewichtungen, mit denen wir unsere Daten möglichst gut erklären können.

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i,1} + \dots + \hat{\beta}_n x_{i,n} + \varepsilon$$

Als Kriterium für gut oder schlecht verwenden wir eine Loss-Funktion. Bei der OLS-Regression ist diese der RMSE:

$$f(\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}$$



Relevanz für Data Science

Wir suchen das Minimum einer Funktion mit potenziell Tausenden Variablen.

$$\min f$$

für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Eine direkte analytische Lösung ist ausgeschlossen. Wir können uns jedoch mithilfe des Gradienten an die Lösung herantasten - **Gradient Descent Algorithmus!**

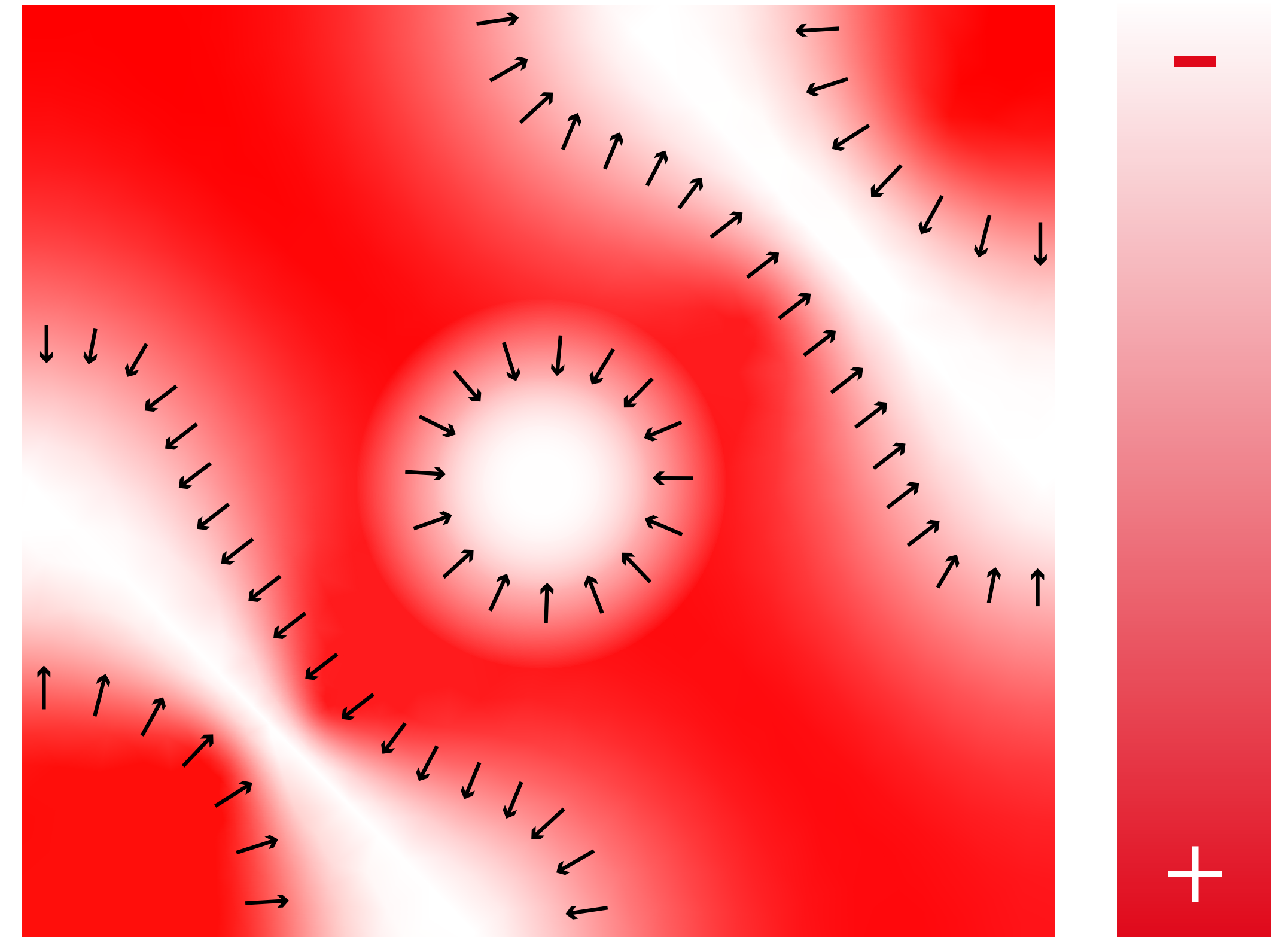


Relevanz für Data Science

Beim Gradient-Descent-Algorithmus beginnen wir an einer gegebenen oder zufälligen Startposition und bewegen uns entlang dem negativen Gradienten.

Auch wenn der Algorithmus nicht deterministisch konvergiert, sollte er sich theoretisch nie in einer Endlosschleife bewegen, da:

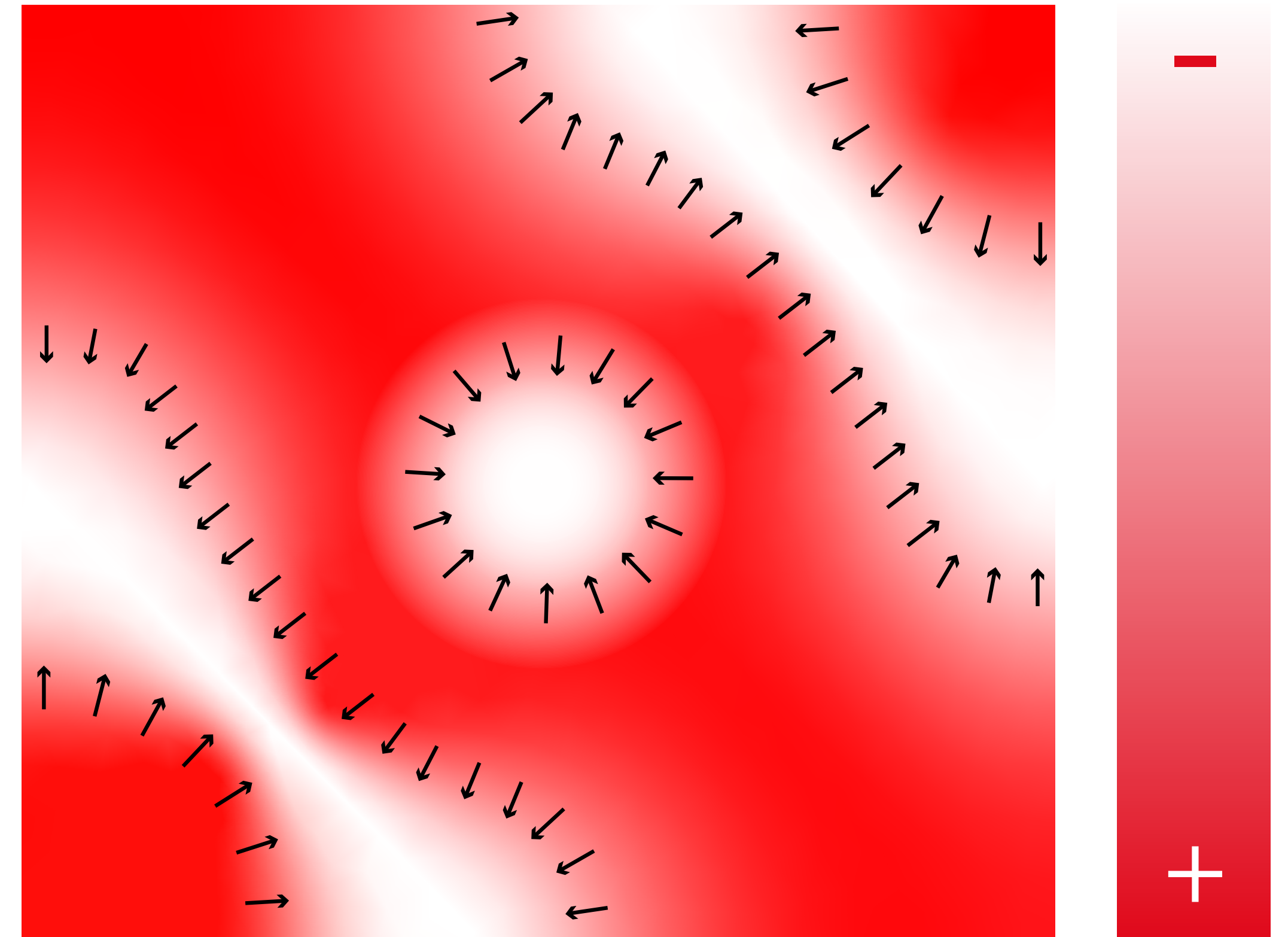
$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = \nabla \times \nabla f = 0$$



Relevanz für Data Science

"Beweis" für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ über den Satz von Schwarz:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \end{aligned}$$

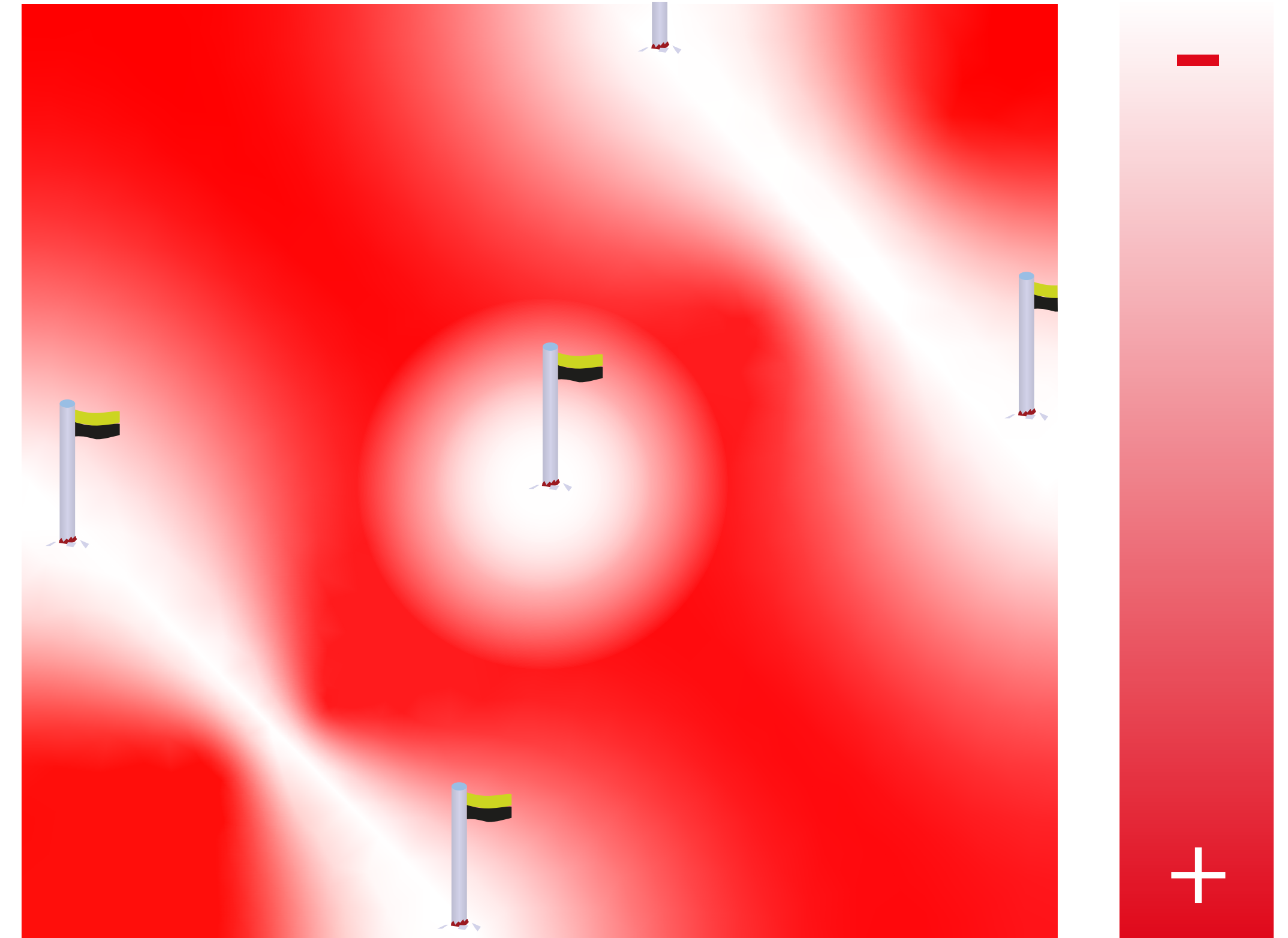


Relevanz für Data Science

An Extremstellen ist der Gradient null:

$$\text{grad}(f) = 0$$

Die Divergenz kann abhängig von der Funktion endliche Werte annehmen oder gegen unendlich gehen. Auch der Wert 0 ist möglich.

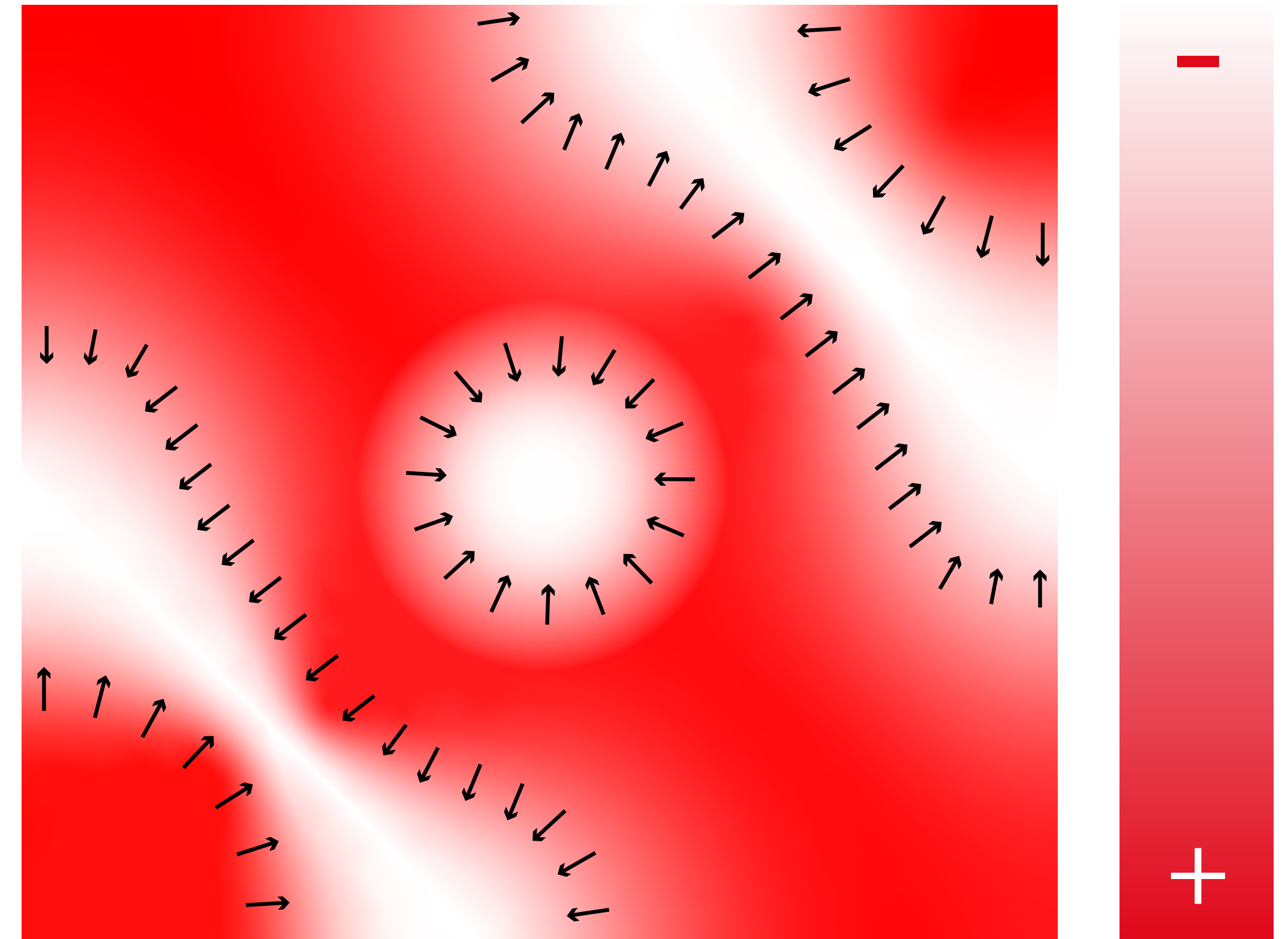


Relevanz für Data Science

Für die Divergenz des Gradienten gibt es den eigenständigen Laplace Operator:

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \text{div}(\text{grad}(f))$$

Der Laplace Operator wird in seiner diskreten Variante z. B. in der Bild- und Kantenerkennung eingesetzt.

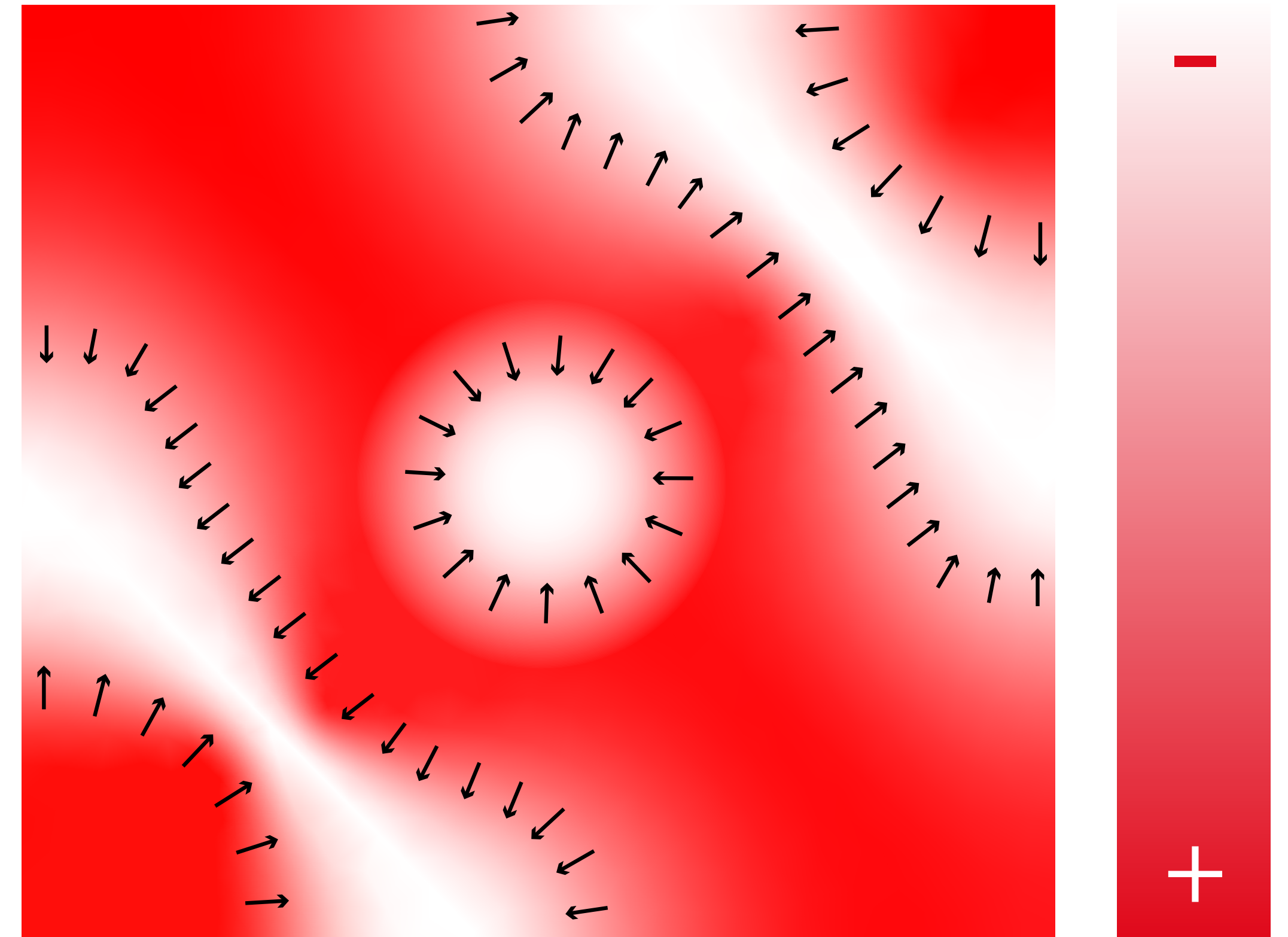


Relevanz für Data Science

Stichwort diskret: Bei der konkreten Implementierung des Gradient-Descent-Algorithmus werden die hier gezeigten Konzepte diskretisiert.

Das bringt einige Probleme mit sich wie z.B. das Finden einer geeigneten Schrittweite. Auch Endlosschleifen können dadurch wieder möglich werden.

Größtes Problem Wir können nicht zwischen globalen und lokalen Minima unterscheiden.

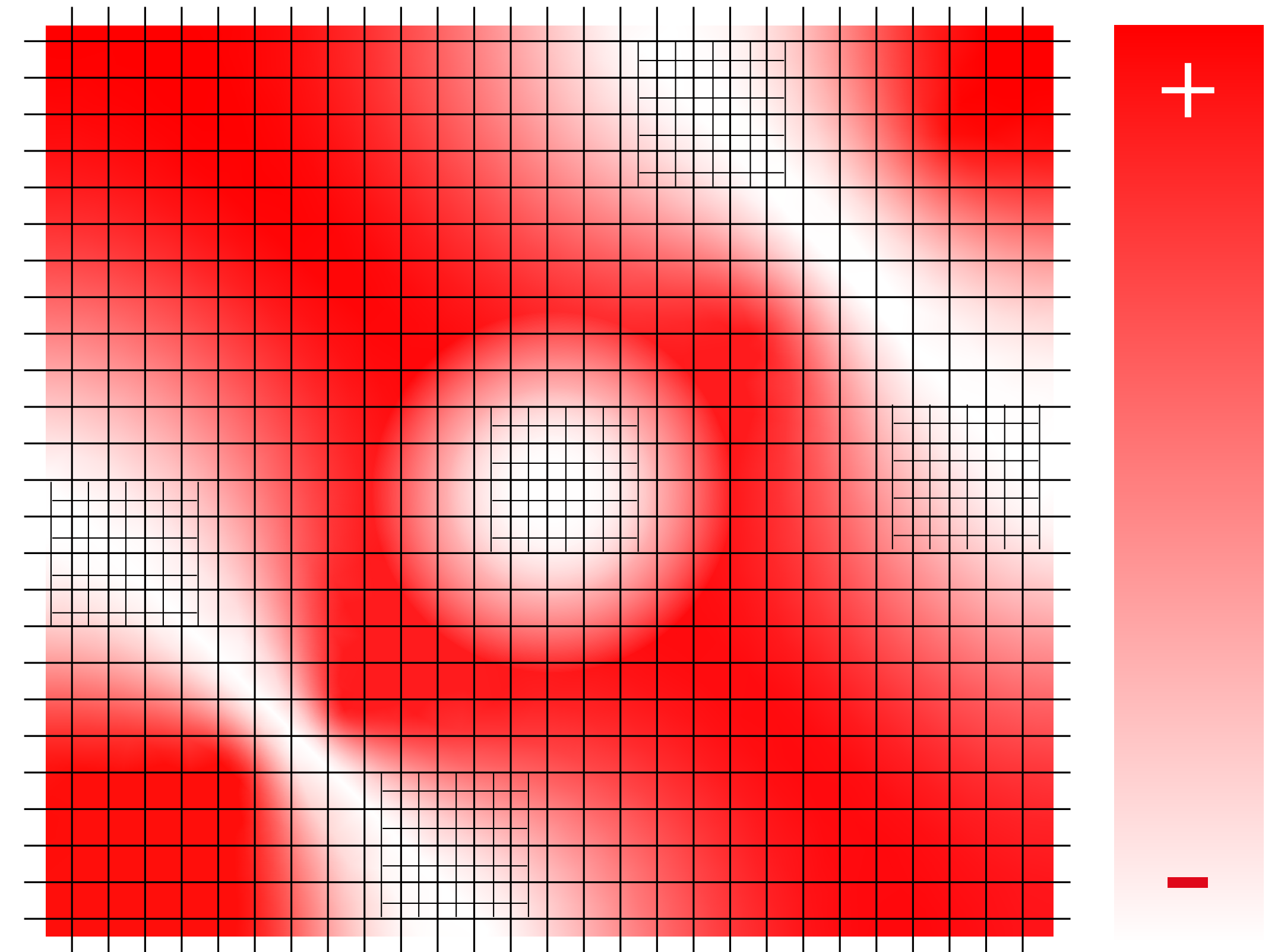


Relevanz für Data Science

Bemerkung Intuitiv würde man bei dem rechts gezeigten zweidimensionalen Beispiel einen Grid-Search-Ansatz einsetzen.

Wir legen ein Gitter über die Funktion und berechnen die Funktionswerte an allen Schnittpunkten. Die Umgebung von aussichtsreichen Stellen können wir dann mit einem feineren Gitter weiter untersuchen.

Bei Anwendungen in höheren Dimensionen performt dieser Algorithmus allerdings sehr schlecht!



Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen (DGL) sind Gleichungen, die eine Funktion mit mindestens einer ihrer Ableitungen in Verbindung setzen.

Die Lösungen sind keine Zahlenwerte, sondern Funktionen $y(x)$ für welche die Differenzialgleichung erfüllt ist.



Klassifikation von DGL

Wir befassen uns ausschließlich mit gewöhnlichen DGL.

Bei **gewöhnlichen Differenzialgleichungen** sind die Funktionen von genau einer Variable abhängig.

Das Gegenteil von gewöhnlich ist nicht ungewöhnlich, sondern partiell. **Partielle Differenzialgleichungen** suchen Funktionen mit mindestens zwei Variablen.

Differenzialgleichungen

Gewöhnlich: nur eine Variable. Gleichung enthält keine partiellen Ableitungen.

$$y'(x) = f(x) g(y(x)) + h(x)$$

Partiell: mehrere Variablen. Gleichung enthält partielle Ableitungen nach zwei oder mehr Variablen.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Klassifikation von DGL

Wir befassen uns mit expliziten DGL erster Ordnung.

Die **Ordnung** einer Differenzialgleichung gibt die höchste Ableitung an, die in der DGL vorkommt.

Ist die DGL nach dieser höchsten Ableitung aufgelöst, wird sie als **explizite Differenzialgleichung** bezeichnet.

Differenzialgleichungen

Ordnung: höchste Ableitung in der DGL

1. Ordnung	$y'(x) = \dots$
2. Ordnung	$y''(x) = \dots$
3. Ordnung	$y^{(3)}(x) = \dots$
4. Ordnung	$y^{(4)}(x) = \dots$

Klassifikation von DGL

Unsere ersten Beispiele sind lineare DGL.

Eine Differenzialgleichung ist **linear**, wenn die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen nur in linearer Form vorkommen.

Sobald die gesuchte Funktion oder eine ihrer Ableitungen als Potenz oder in einer Funktion verschachtelt vorkommen, ist die Differenzialgleichung **nichtlinear**.

Differenzialgleichungen

Linear: Funktion und Ableitung kommen nur linear vor

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$$

Nichtlinear: Funktion oder Ableitungen kommen als Potenz oder in einer Funktion verschachtelt vor.

$$y'(x) = \sin(y^2(x))$$

Klassifikation von DGL

Wir unterscheiden in homogene und inhomogene DGL:

Eine Differenzialgleichung ist **homogen**, wenn die gesuchte Funktion nur von ihren Ableitungen abhängt.

Eine Differenzialgleichung ist **inhomogen**, wenn neben der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen auch noch weitere Funktionen in der DGL enthalten sind.

Differenzialgleichungen

Homogen: Funktion hängt nur von Ableitungen ab.

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$$

Inhomogen: Funktion hängt nicht nur von Ableitungen ab.

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x) + x$$

Linear homogene DGL

Die wohl einfachste Differenzialgleichung lautet:

$$y' = y$$
$$y'(x) = y(x)$$

Es ist eine explizite, lineare, homogene DGL erster Ordnung.

Wir suchen eine Funktion, deren Ableitung exakt der ursprünglichen Funktion entspricht.



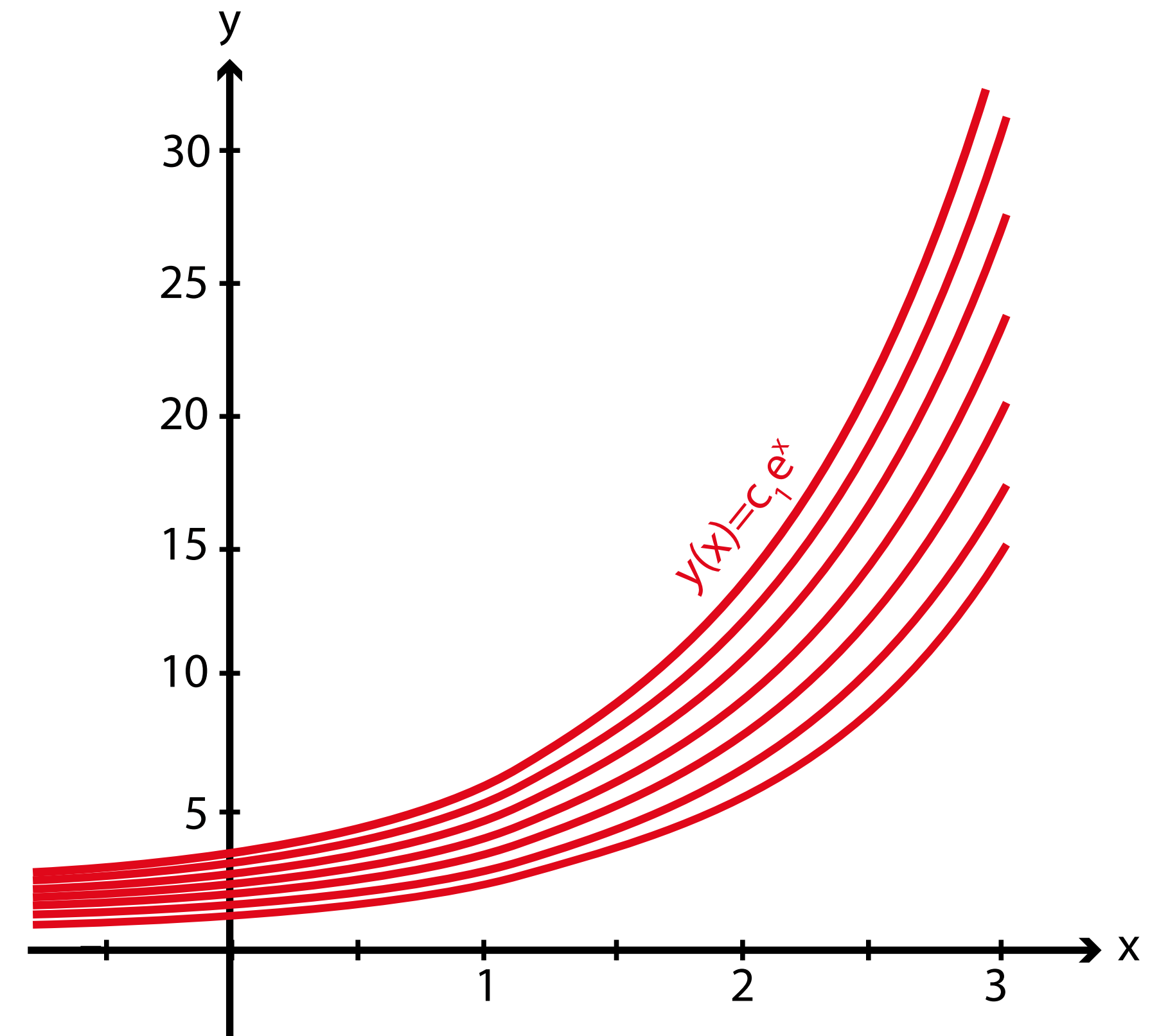
Linear homogene DGL

Wir kennen eine passende Funktion aus der Analysis!

$$y(x) = e^x \text{ ist Lösung von } y' = y$$

Tatsächlich ist das aber nur eine von vielen möglichen Lösungen. Wir können sie mit einem beliebigen Faktor multiplizieren, ohne die DGL zu verletzen:

$$y' = y \Rightarrow y(x) = c_1 e^x \quad c_1 \in \mathbb{R}$$



Linear homogene DGL

Wir verallgemeinern unsere Differenzialgleichung um einen konstanten Faktor α vor der gesuchten Funktion.

$$y'(x) = \alpha y(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Diese Konstellation wird als lineare, homogene DGL **mit konstanten Koeffizienten** bezeichnet.

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}})}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \overbrace{g'(\underbrace{h(x)}_{\text{Innere Fkt.}})}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

Linear homogene DGL

Die Lösung ist naheliegend: Wir verwenden erneut die Eigenschaft der Exponentialfunktion und ergänzen den konstanten Faktor im Exponenten:

$$y' = \alpha y \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\alpha x} \quad \alpha, c_1 \in \mathbb{R}$$

Mit der Kettenregel können wir unsere Lösung überprüfen!

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(h(x))}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

Innere Fkt.

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \overbrace{g'(h(x))}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

Innere Fkt.

Anfangswertprobleme

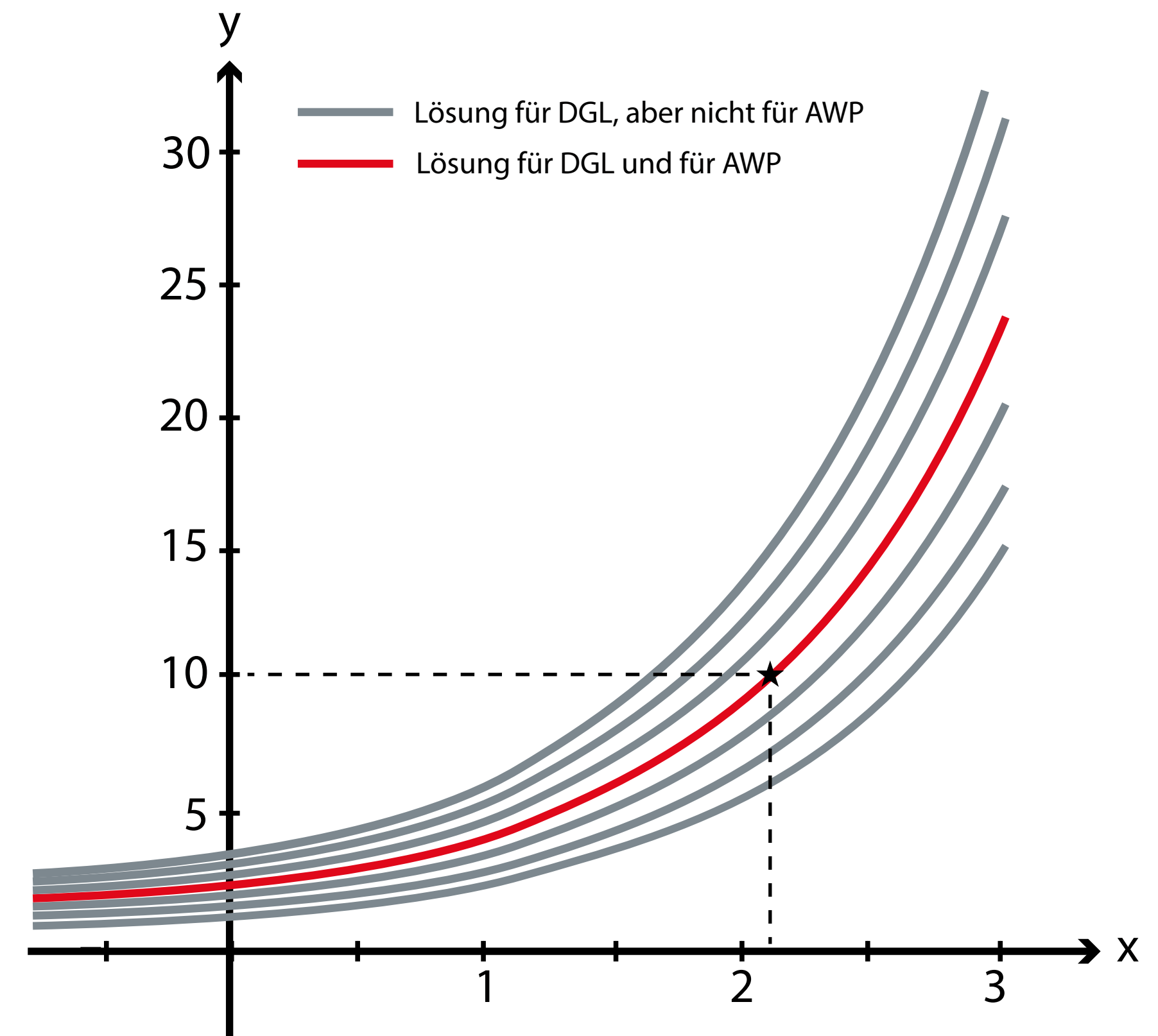
Bevor wir kompliziertere Varianten angehen, wollen wir unsere DGL um ein **Anfangswertproblem** erweitern.

Wir geben nicht nur ein Verhältnis von gesuchter Funktion zur Ableitung vor ...

$$y'(x) = \alpha y(x)$$

... sondern verlangen zusätzlich, dass die gesuchte Funktion einen bestimmten Wert an einer bestimmten Stelle hat!

$$y(x_0) = y_0$$

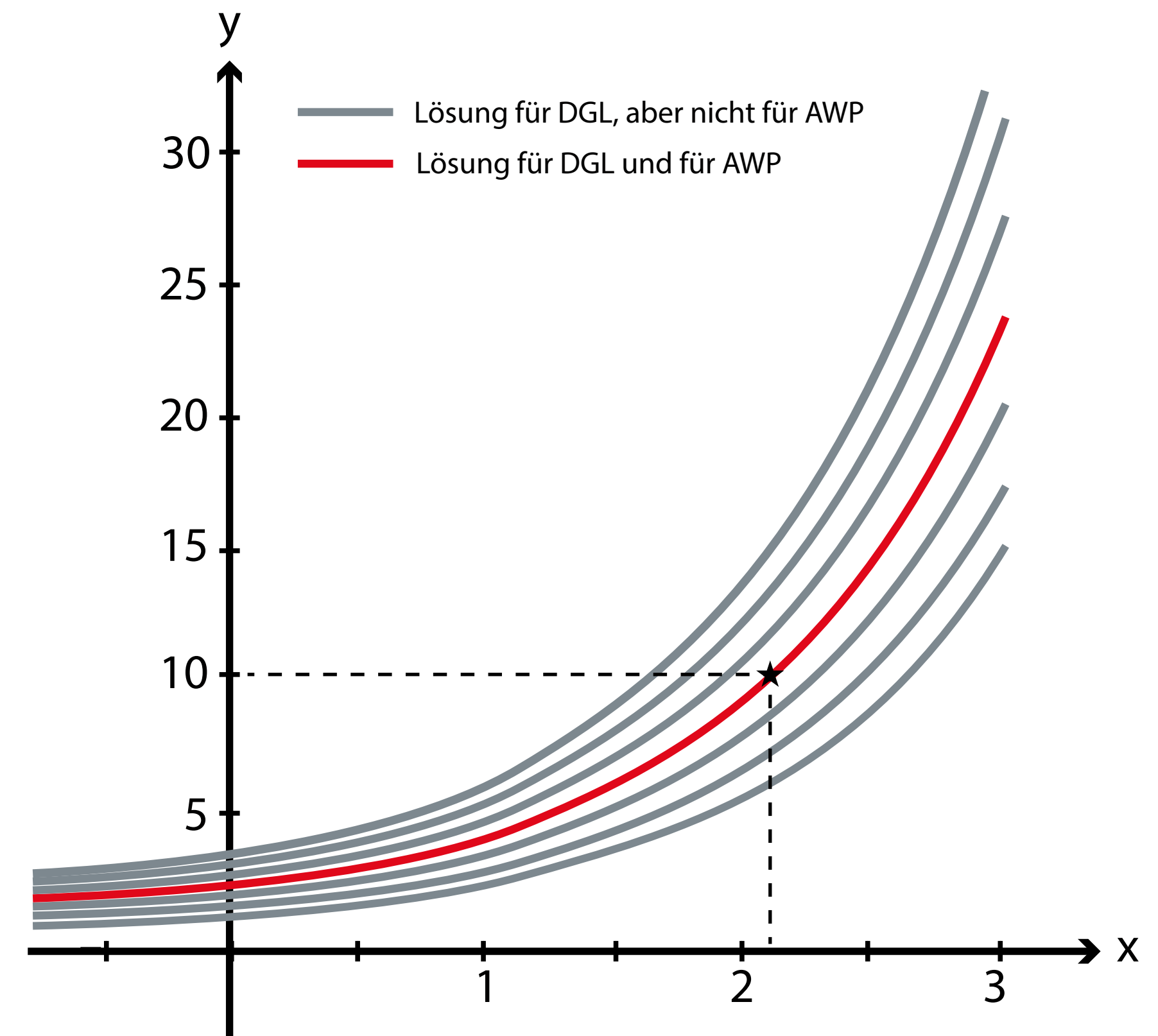


Anfangswertprobleme

Für unsere lineare, homogene DGL mit konstanten Koeffizienten gibt es eine einfache Lösungsformel!

$$y'(x) = \alpha y(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

$$y(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$$



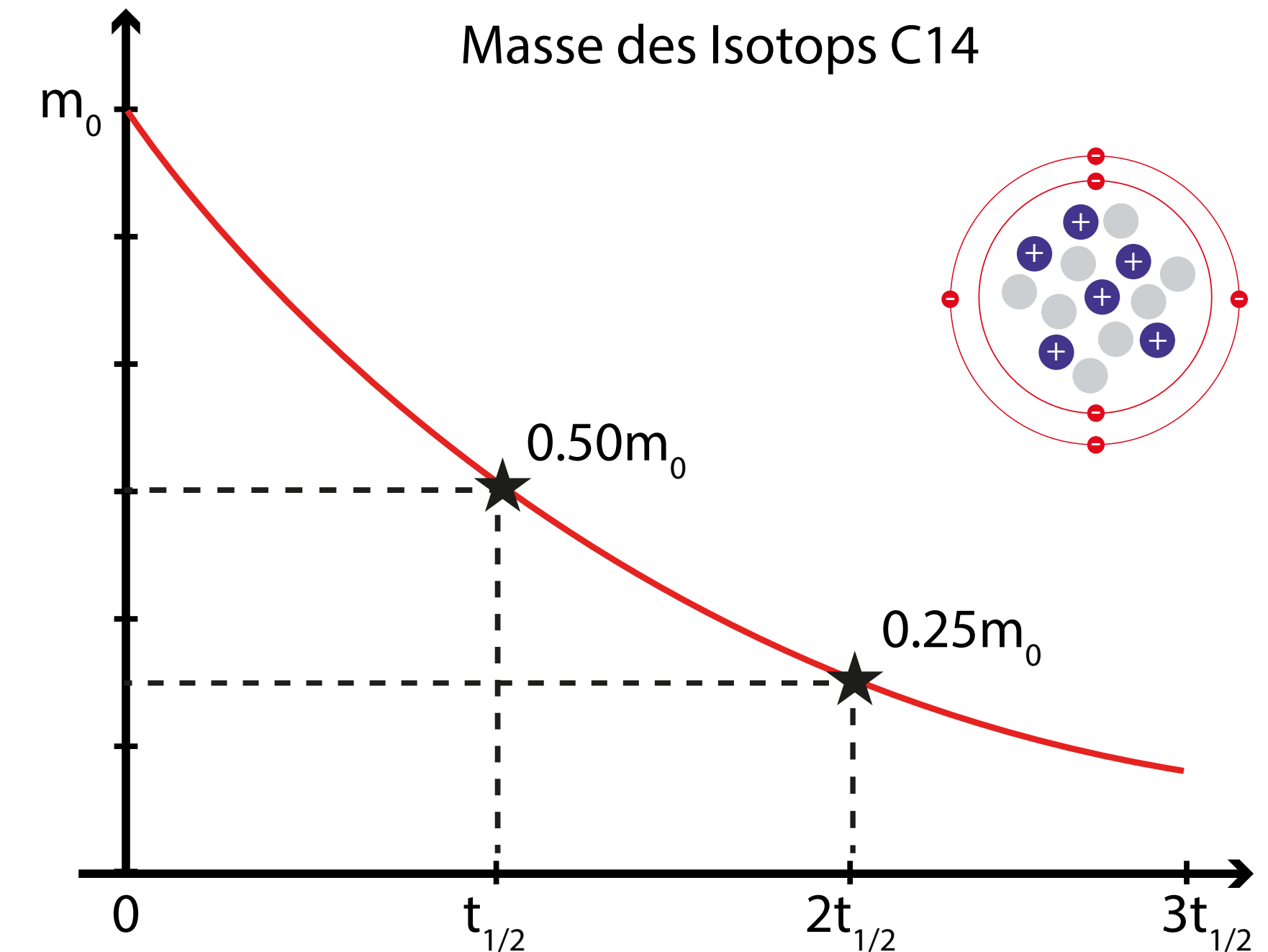
Anfangswertprobleme

Beispiel Das Kohlenstoffisotop C14 zerfällt mit einer Halbwertszeit von ungefähr 5700 Jahren.

Von 1000g C14 sind nach 5700 Jahren nur noch 500g übrig. Nach weiteren 5700 Jahren sind es dann noch 250g ...

Wir können diese Dynamik als DGL mit konstanten Koeffizienten darstellen, aber wie groß ist der Faktor α ?

$$y'(x) = \alpha y(x)$$



$$y(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$$

Anfangswertprobleme

Wir wenden unsere Lösungsformel an:

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad \text{mit } y(0) = 1000$$

$$\Rightarrow y(t) = 1000 e^{\alpha t}$$

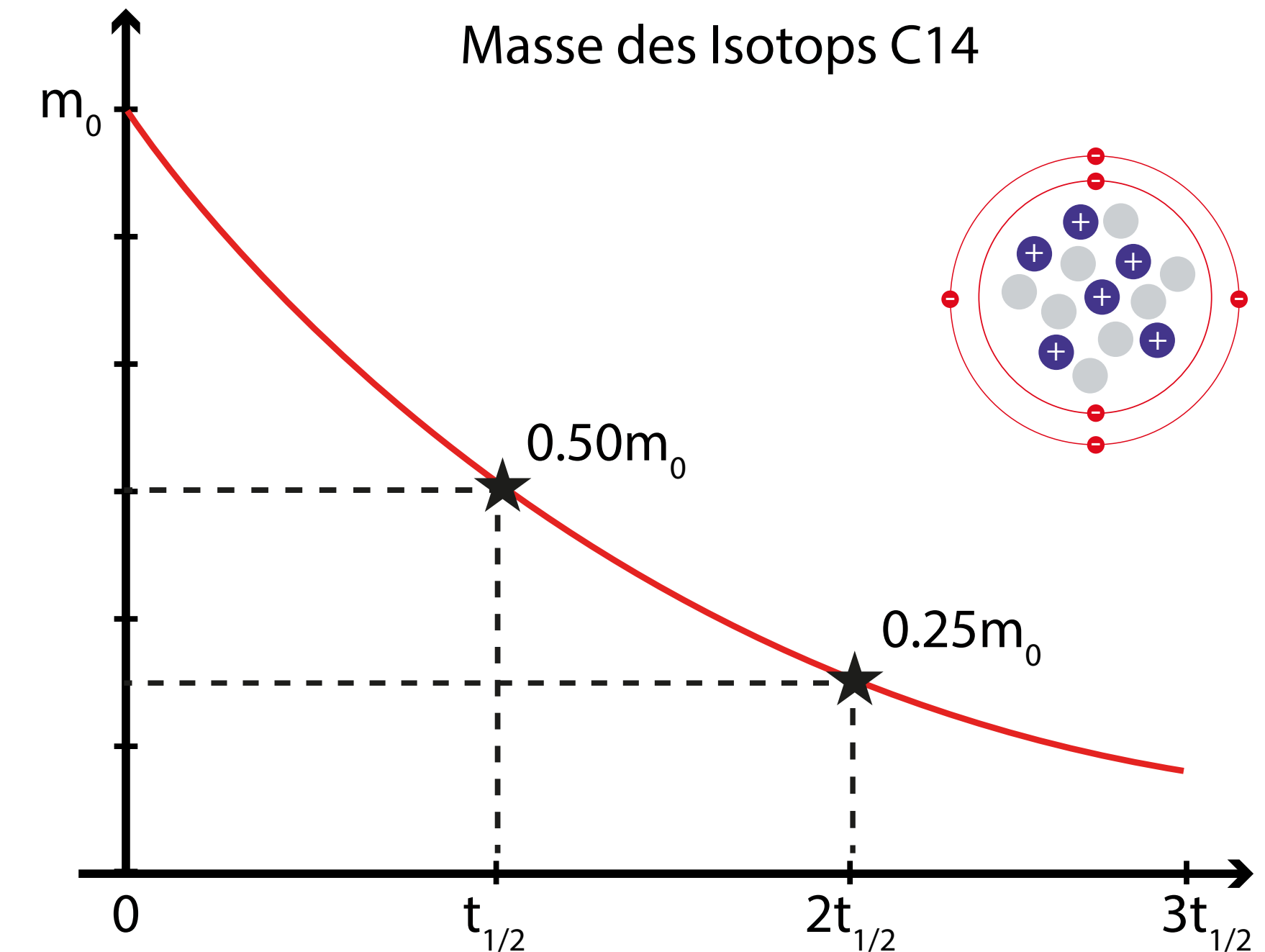
Aus der Halbwertszeit folgt die Bedingung:

$$y(5700) = 1000 e^{5700\alpha} \stackrel{!}{=} 500$$

$$\Leftrightarrow e^{5700\alpha} = 0.5$$

$$\Leftrightarrow 5700\alpha = \ln(0.5)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -0.0001216$$



$$y(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$$

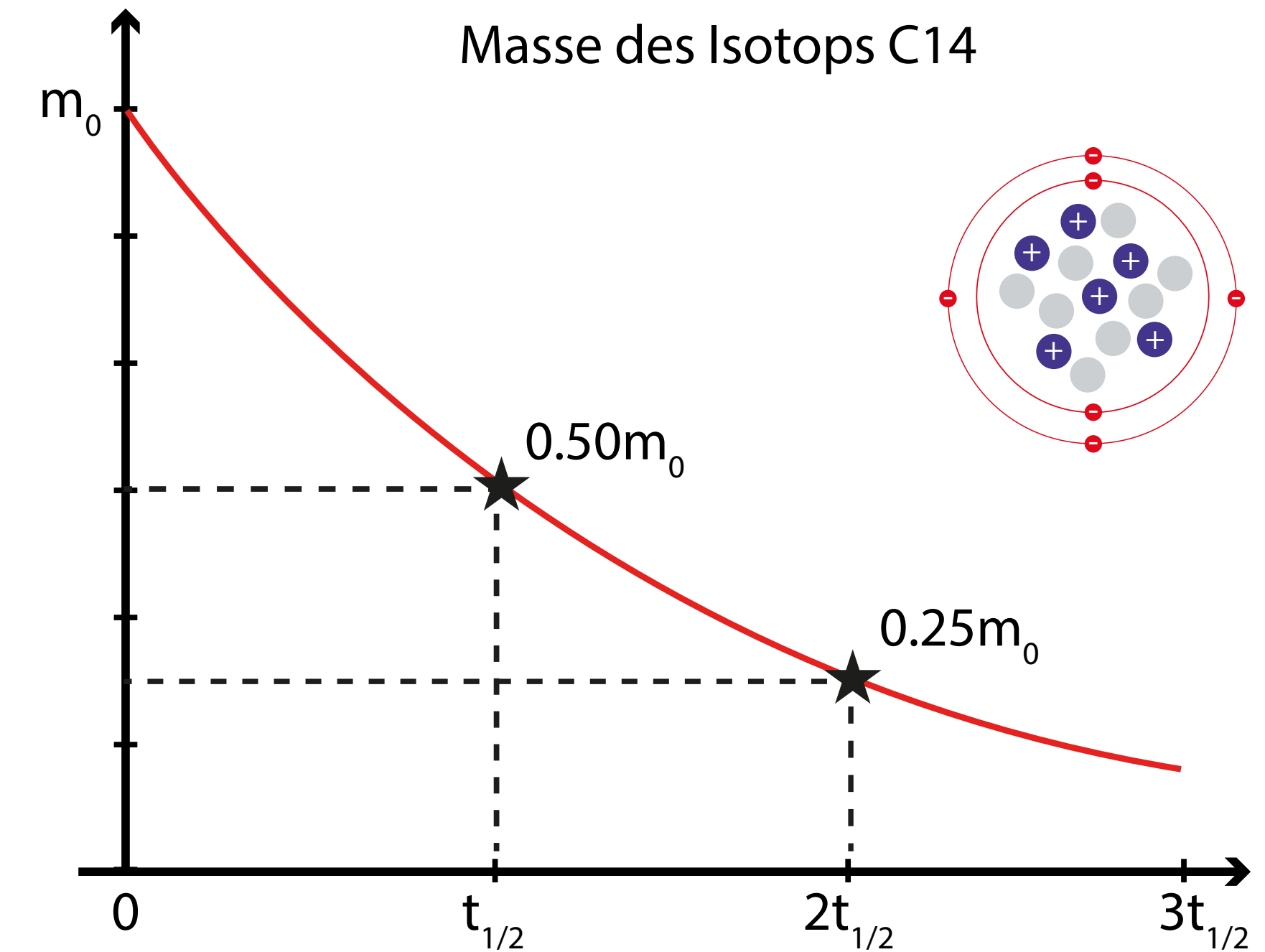
Anfangswertprobleme

Die DGL für eine allgemeine Halbwertszeit $t_{1/2}$ und eine Anfangsmasse m_0 ist ...

$$y'(x) = -\lambda y(x) \quad \text{mit } y(0) = m_0, \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$$

... mit der Lösung:

$$y(x) = m_0 e^{-\lambda x}$$



$$y(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$$

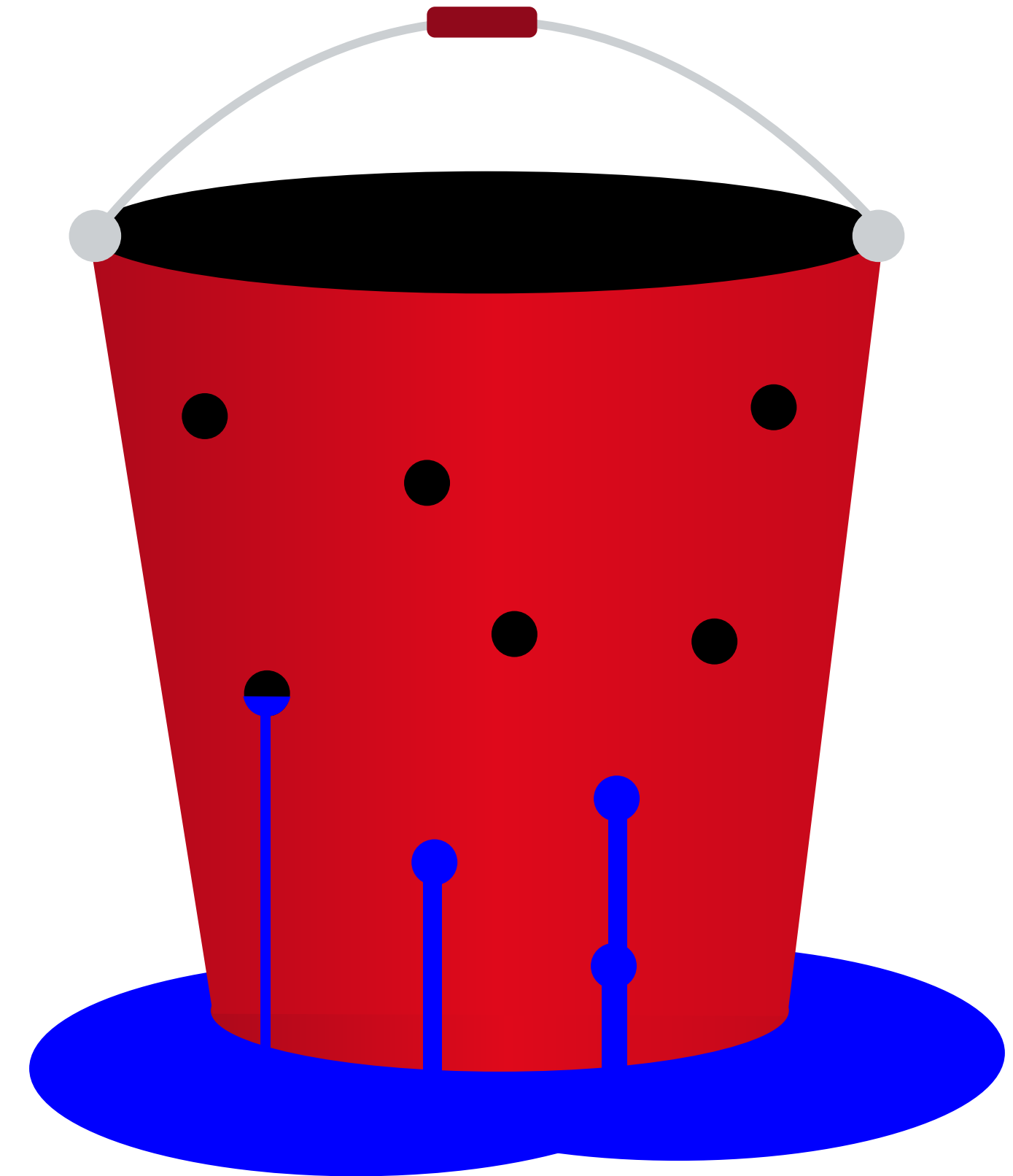
Anfangswertprobleme

Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

$$y'(x) = 2 \cdot y(x) \quad \text{mit } y(4) = 8$$

$$y'(x) = \ln(10) \cdot y(x) \quad \text{mit } y(0) = 1$$

Aus einem löchrigen Eimer läuft jede Minute die Hälfte des Wassers heraus. Wie lange dauert es, bis von 10 Litern nur noch 2 Liter übrig sind?



Anfangswertprobleme

$$y'(x) = 2 \cdot y(x) \quad \text{mit } y(4) = 8$$

$$y(x) = 8e^{2(x-4)}$$

$$y'(x) = \ln(10) \cdot y(x) \quad \text{mit } y(0) = 1$$

$$\begin{aligned} y(x) &= 1e^{\ln(10)(x-0)} \\ &= e^{\ln(10)x} \\ &= [e^{\ln(10)}]^x = 10^x \end{aligned}$$

$$y'(t) = -\lambda y(t) \quad \text{mit } y(0) = 10, \lambda = \ln(2)/1$$

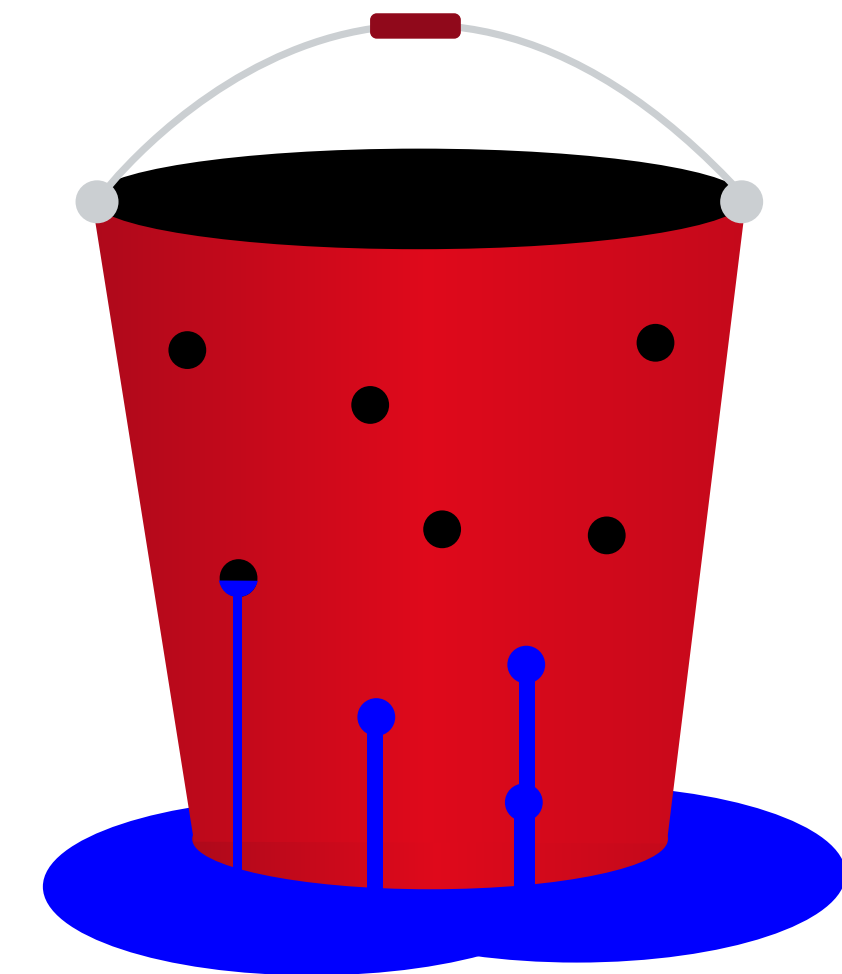
$$y(t) = 10e^{-\ln(2)t}$$

$$y(t) = 10e^{-\ln(2)t} \stackrel{!}{=} 2$$

$$\Leftrightarrow e^{-\ln(2)t} = 0.2$$

$$\Leftrightarrow -\ln(2)t = \ln(0.2)$$

$$\Leftrightarrow t = 2.32$$



Linear homogene DGL

Wir verallgemeinern unsere DGL weiter! Aus dem konstanten Faktor α wird eine beliebige stetige Funktion $a(x)$:

$$y'(x) = a(x) y(x)$$

Die Lösung ist eine Exponentialfunktion mit Basis e und der Stammfunktion von $a(x)$ als Exponent.

$$y' = a(x) \cdot y \Rightarrow y(x) = c_1 e^{A(x)} \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(h(x))}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

Innere Fkt.

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \overbrace{g'(h(x))}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

Innere Fkt.

Linear homogene DGL

Haben wir zusätzlich ein Anfangswertproblem, können wir die Konstante c_1 berechnen.

DGL mit AWP: $y'(x) = a(x) y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$

Allgemein: $y(x) = c_1 e^{A(x)}$

Lösung AWP: $y_0 = c_1 e^{A(x_0)}$ $| : e^{A(x_0)}$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0}{e^{A(x_0)}} = c_1 \quad | \ln(\dots)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y_0}{e^{A(x_0)}}\right) = c_1$$

Kettenregel

$$f(x) = \overbrace{g(h(x))}^{\text{Äußere Fkt.}}$$

Innere Fkt.

$$f'(x) = \underbrace{h'(x)}_{\text{Innere Ableitung}} \overbrace{g'(h(x))}^{\text{Äußere Ableitung}}$$

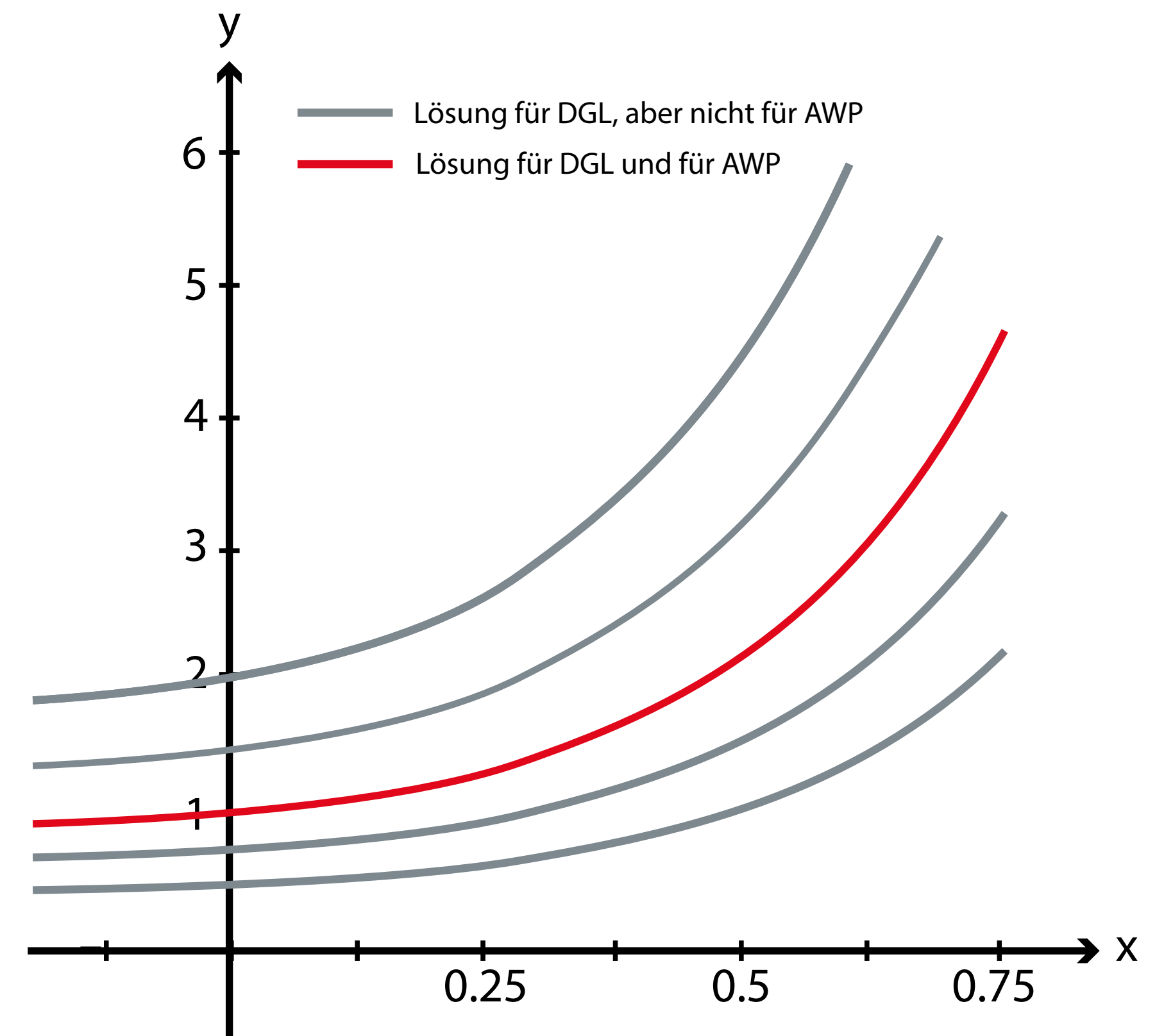
Innere Fkt.

Linear homogene DGL

Beispiel einer linear homogenen DGL 1. Ordnung mit AWP:

DGL: $y'(x) = 2x \cdot y(x)$

AWP: $y(0) = 1$



Linear homogene DGL

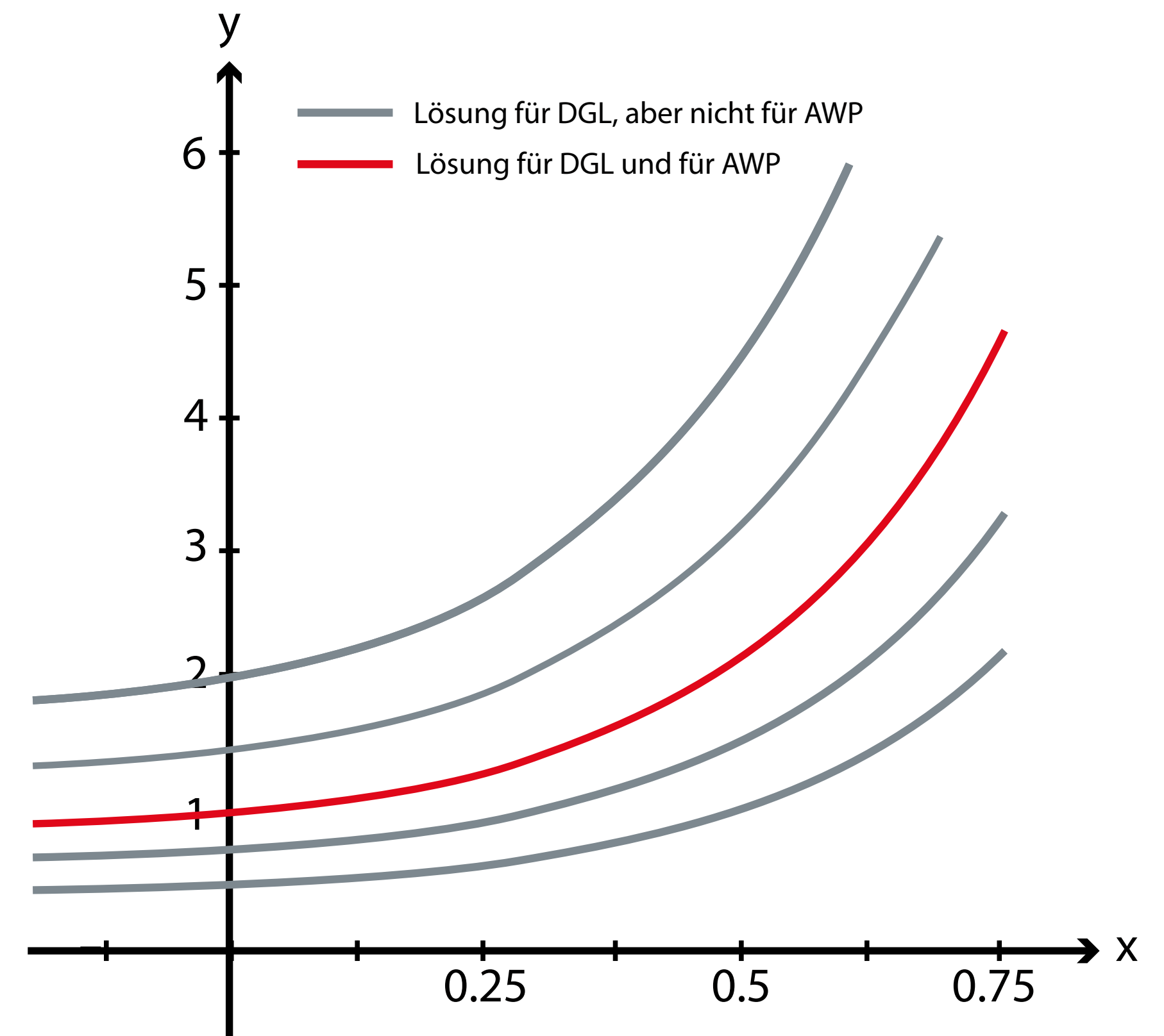
Wir erhalten die folgende Lösung:

$$y(x) = c_1 e^{A(x)} \quad | \text{ mit } A(x) = \int 2x \, dx = x^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = c_1 e^{A(0)} \quad | A(0) = 0 \text{ und } e^0 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = c_1$$

$$y(x) = e^{2x} \text{ löst das AWP}$$



Linear homogene DGL

Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

DGL: $y'(x) = (1-x) \cdot y(x)$

AWP: $y(2) = 15$

DGL: $y'(x) = x^{-1} \cdot y(x)$

AWP: $y(1) = 5$

Linear homogene DGL

$$y'(x) = (1-x) \cdot y(x) \quad \text{DGL}$$

$$y(2) = 15 \quad \text{AWP}$$

$$y(x) = c_1 e^{A(x)} \quad | \text{ mit } A(x) = x - 0.5x^2$$

$$15 = c_1 e^{x_0 - 0.5x_0^2} \quad | \text{ mit } A(2) = 0 \text{ und } e^0 = 1$$

$$15 = c_1$$

$$y(x) = 15e^{x-0.5x^2} \text{ löst das AWP}$$

$$y'(x) = x^{-1} \cdot y(x) \quad \text{DGL}$$

$$y(1) = 5 \quad \text{AWP}$$

$$y(x) = c_1 e^{A(x)} \quad | \text{ mit } A(x) = \int x^{-1} dx = \ln(x)$$

$$5 = c_1 e^{\ln(1)} \quad | \text{ mit } e^{\ln(5)} = 5$$

$$5 = c_1$$

$$y(x) = 5x \text{ löst das AWP}$$

Linear inhomogene DGL

Bei einer inhomogenen linearen DGL gibt es einen Term, der nicht von der gesuchten Funktion oder ihren Ableitungen abhängt.

$$y'(x) = a(x) y(x) + b(x)$$

Trotz der "Störfunktion" gibt es eine feste Lösungsformel für Anfangswertprobleme:

$$y(x) = e^{A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(u) e^{-A(u)} du \right)$$

Differenzialgleichungen

~~Homogen:~~ Funktion hängt nur von Ableitungen ab.

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$$

Linear: Funktion und Ableitung kommen nur linear vor

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$$

Linear inhomogene DGL

Beispiel einer linear inhomogenen DGL 1. Ordnung mit AWP:

$$y'(x) = x^{-1} y(x) + x^2 \quad \text{mit } y(0) = 0$$

Lösungsformel

$$y'(x) = a(x) y(x) + b(x) \\ \text{mit } y(x_0) = y_0$$

$$y(x) = e^{A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(u) e^{-A(u)} du \right)$$

Linear inhomogene DGL

Beispiel einer linear inhomogenen DGL 1. Ordnung mit AWP:

$$y'(x) = x^{-1} y(x) + x^2 \quad \text{mit } y(0) = 0$$

$$y(x) = e^{\ln(x)} \left(0 + \int_0^x u^2 e^{-\ln(u)} du \right)$$

$$\begin{aligned} y(x) &= x \int_0^x u^2 u^{-1} du \\ &= x \int_0^x u du = x \left[\frac{1}{2} u^2 + c_1 \right]_0^x = \frac{1}{2} x^3 + c_1 x \end{aligned}$$

Lösungsformel

$$y'(x) = a(x) y(x) + b(x)$$

$$\text{mit } y(x_0) = y_0$$

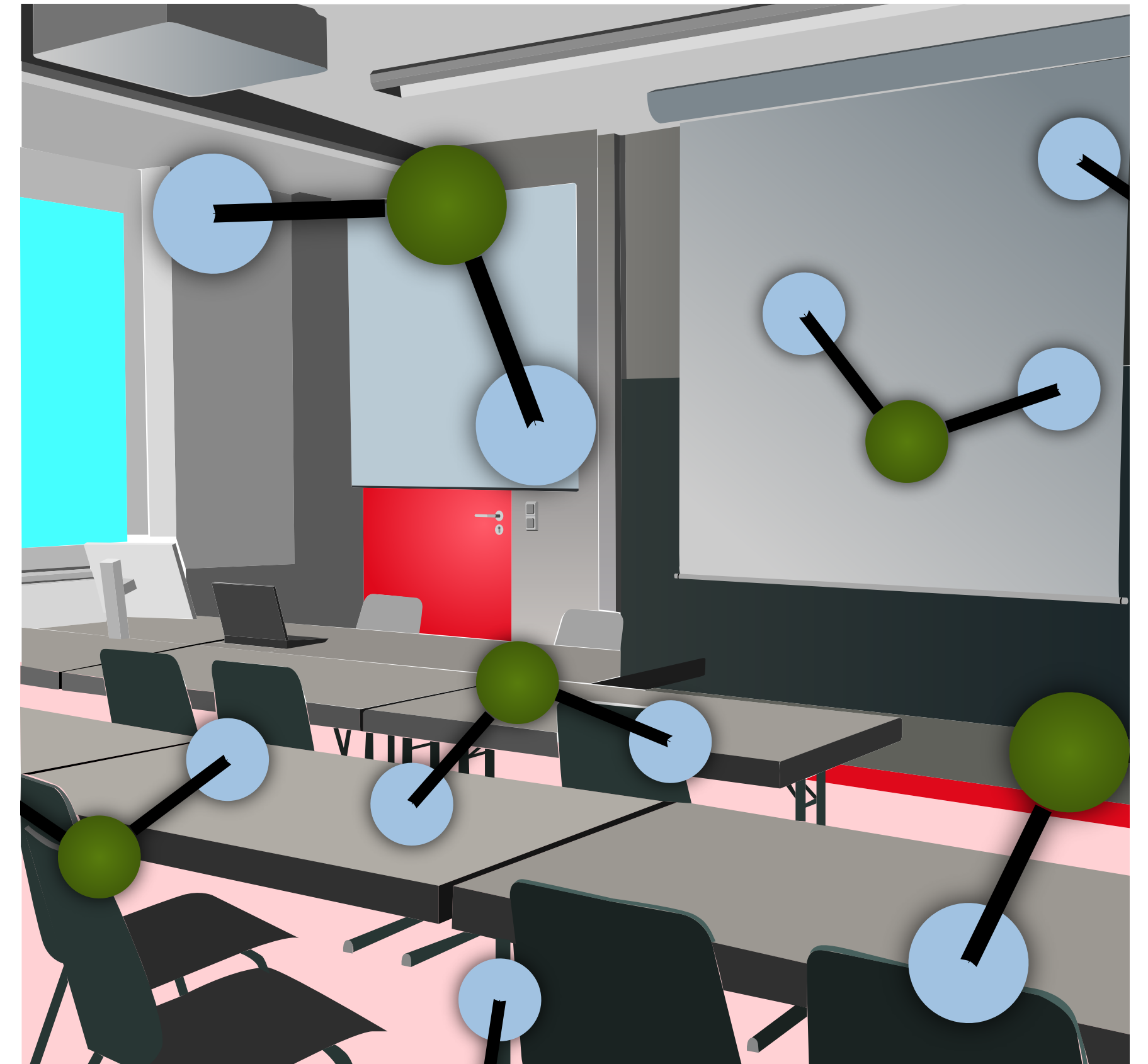
$$y(x) = e^{A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(u) e^{-A(u)} du \right)$$

Linear inhomogene DGL

Ein Kursraum fasst 200m^3 Luft. Der Kurs erzeugt 10g CO_2 pro Minute. Bei geschlossenen Fenstern werden pro Minute 2m^3 Raumluft durch Frischluft ersetzt.

Wir nehmen an, dass die Frischluft kein CO_2 enthält und der Raum am Anfang komplett mit Frischluft gefüllt ist.

1. Wie können wir die Dynamik der Raumluft mit einer DGL beschreiben?
2. Ist die passive Belüftung ausreichend oder sollte ab und zu ein Fenster geöffnet werden?



Linear inhomogene DGL

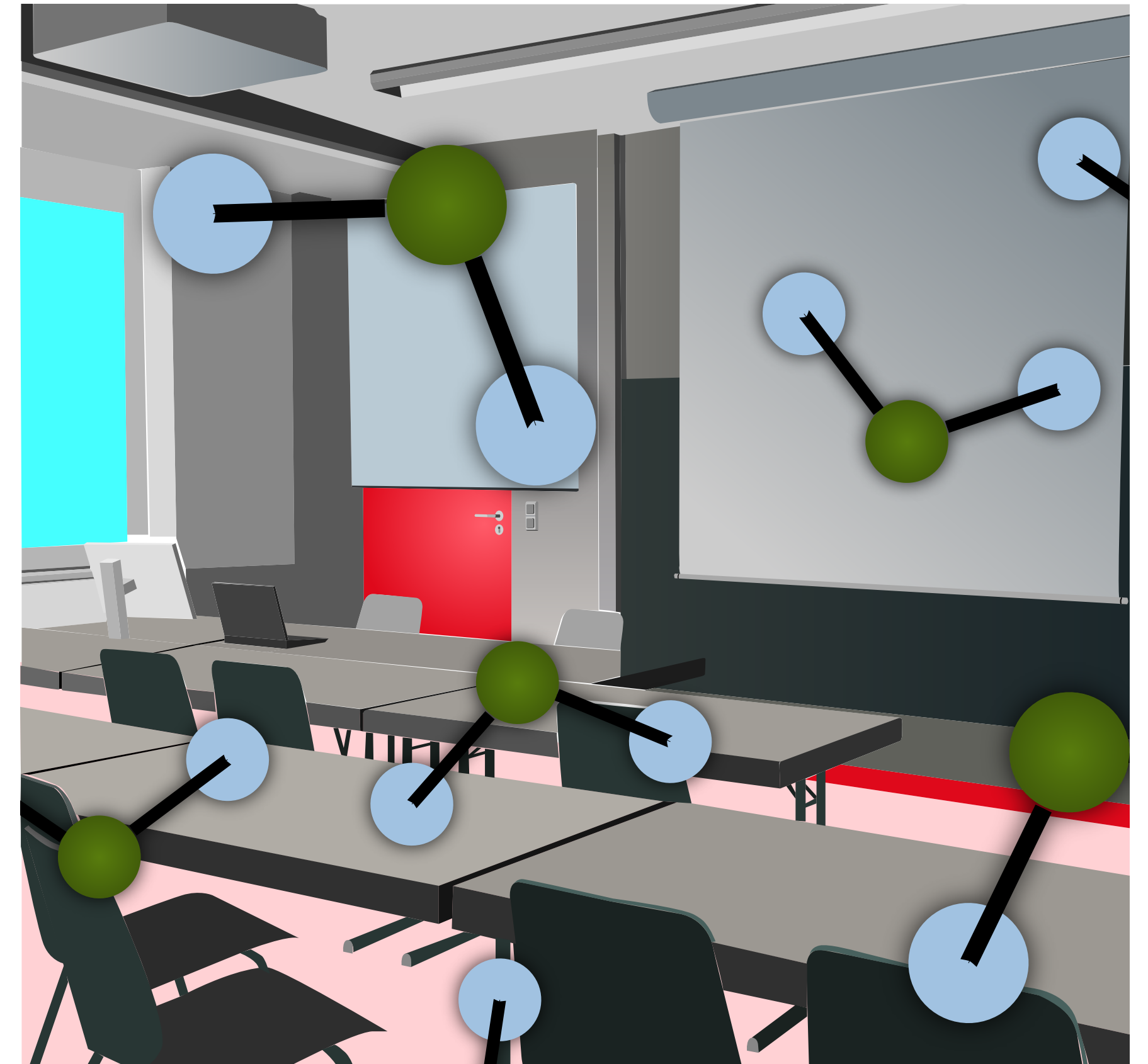
Für die erste Frage sind folgende Angaben wichtig:

Zunahme CO₂: 10g pro Minute

Abnahme CO₂: 1% pro Minute

Als DGL geschrieben:

$$y'(x) = -0.01 \cdot y(x) + 10 \text{ mit } y(0) = 0$$



Linear inhomogene DGL

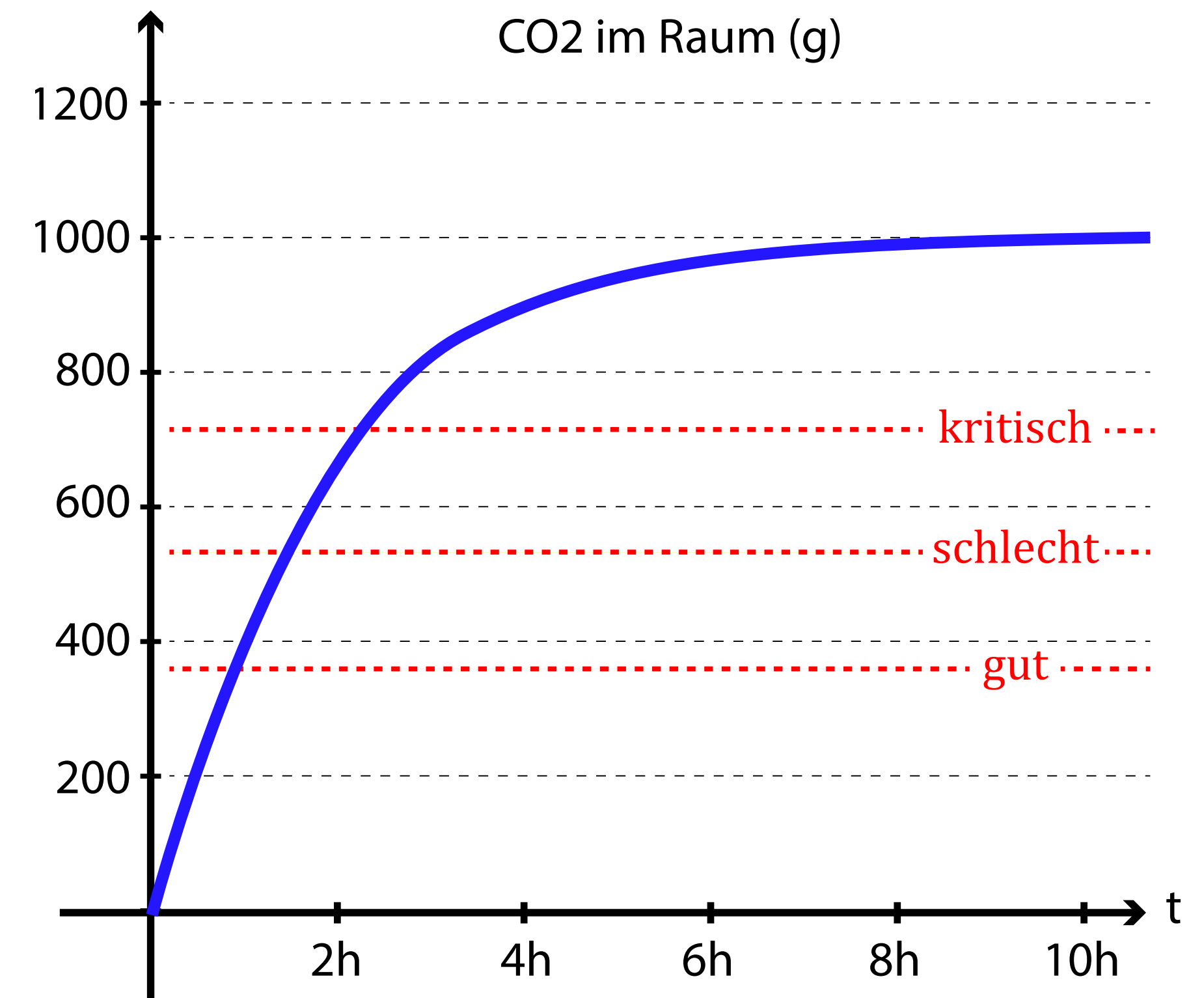
$$y'(x) = -0.01 \cdot y(x) + 10 \quad \text{mit } y(0) = 0$$

$$y(x) = e^{-0.01x} \left(0 + \int_0^x 10 e^{0.01u} du \right)$$

$$y(x) = 10e^{-0.01x} \int_0^x e^{0.01u} du$$

$$y(x) = 10e^{-0.01x} (100e^{0.01x} - 100)$$

$$y(x) = 1000 - 1000e^{-0.01x}$$



Linear inhomogene DGL

Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

$$y'(x) = x^{-1} y(x) + 3x^3 \quad \text{mit } y(2) = 0$$

$$y'(x) = y(x) + e^x \quad \text{mit } y(0) = 0$$

Lösungsformel

$$y'(x) = a(x) y(x) + b(x)$$

$$\text{mit } y(x_0) = y_0$$

$$y(x) = e^{A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(u) e^{-A(u)} du \right)$$

Linear inhomogene DGL

$$y'(x) = x^{-1} y(x) + 3x^3 \quad \text{mit } y(2) = 0$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\ln(x)} \left(0 + \int_2^x 3u^3 e^{-\ln(u)} du \right) \\ &= x \left(0 + \int_2^x 3u^3 u^{-1} du \right) \\ &= x \left(0 + \left[u^3 \right]_2^x \right) = x^4 - 8x \end{aligned}$$

$$y'(x) = y(x) + e^x \quad \text{mit } y(0) = 0$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x \left(0 + \int_0^x e^u e^{-u} du \right) \\ &= e^x \int_0^x 1 du = x \cdot e^x \end{aligned}$$

Getrennte Veränderliche

Alle unsere bisherigen DGL waren linear. Wenn wir diese Einschränkung aufheben, ist eine analytische Lösung nicht immer möglich.

Eine Unterart der nichtlinearen DGL die wir auch analytisch lösen können sind DGL mit trennbaren Veränderlichen.

$$y'(x) = f(x) g(y(x))$$

Differenzialgleichungen

Homogen: Funktion hängt nur von Ableitungen ab.

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$$

~~Linear:~~ Funktion und Ableitung kommen nur linear vor

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$$

Getrennte Veränderliche

Der Lösungsweg führt zu zwei Integralen:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) g(y(x))$$

$$\Leftrightarrow dy = f(x) dx g(y(x))$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{g(y(x))} = f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y(x))} = \int f(x) dx$$

Differenzialgleichungen

Homogen: Funktion hängt nur von Ableitungen ab.

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$$

~~Linear:~~ Funktion und Ableitung kommen nur linear vor

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$$

Getrennte Veränderliche

Beispiel für DGL mit getrennten Veränderlichen:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y(x)^2 \quad \text{mit } y(0) = 1$$

Getrennte Veränderliche

$$\frac{dy}{dx} = f(x) g(y(x))$$

$$\Leftrightarrow dy = f(x) dx g(y(x))$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{g(y(x))} = f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y(x))} = \int f(x) dx$$

Getrennte Veränderliche

Beispiel für DGL mit getrennten Veränderlichen:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y(x)^2 \quad \text{mit } y(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int x \, dx$$

$$\Leftrightarrow -y^{-1} = 0.5x^2 + c_1$$

$$\Leftrightarrow -y = \frac{1}{0.5x^2 + c_1}$$

$$y = \frac{-2}{x^2 - 2}$$

Getrennte Veränderliche

$$\frac{dy}{dx} = f(x) g(y(x))$$

$$\Leftrightarrow dy = f(x) dx g(y(x))$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{g(y(x))} = f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y(x))} = \int f(x) dx$$

Getrennte Veränderliche

Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

$$y'(x) = \frac{x}{y(x)} \quad \text{mit } y(0) = 2$$

$$y'(x) = 2x e^{y(x)} \quad \text{mit } y(0) = 0$$

Getrennte Veränderliche

$$\frac{dy}{dx} = f(x) g(y(x))$$

$$\Leftrightarrow dy = f(x) dx g(y(x))$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{g(y(x))} = f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y(x))} = \int f(x) dx$$

$$y'(x) = \frac{x}{y(x)} \quad \text{mit } y(0) = 2$$

$$\int y \, dy = \int x \, dx$$

$$\Leftrightarrow 0.5y^2 = 0.5x^2 + c_1$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2 + 2c_1$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 2c_1}$$

$$y(0) = \sqrt{0^2 + 2c_1} \stackrel{!}{=} 2$$

$$\Rightarrow y(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$y'(x) = 2x e^{y(x)} \quad \text{mit } y(0) = 0$$

$$\int \frac{1}{e^y} \, dy = \int 2x \, dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{e^y} = x^2 + c_1$$

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{1}{-x^2 - c_1}$$

$$\Rightarrow y = \ln\left(\frac{1}{-x^2 - c_1}\right) = -\ln(-x^2 - c_1)$$

$$y(0) = -\ln(-0^2 - c_1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow y(x) = -\ln(-x^2 + 1)$$

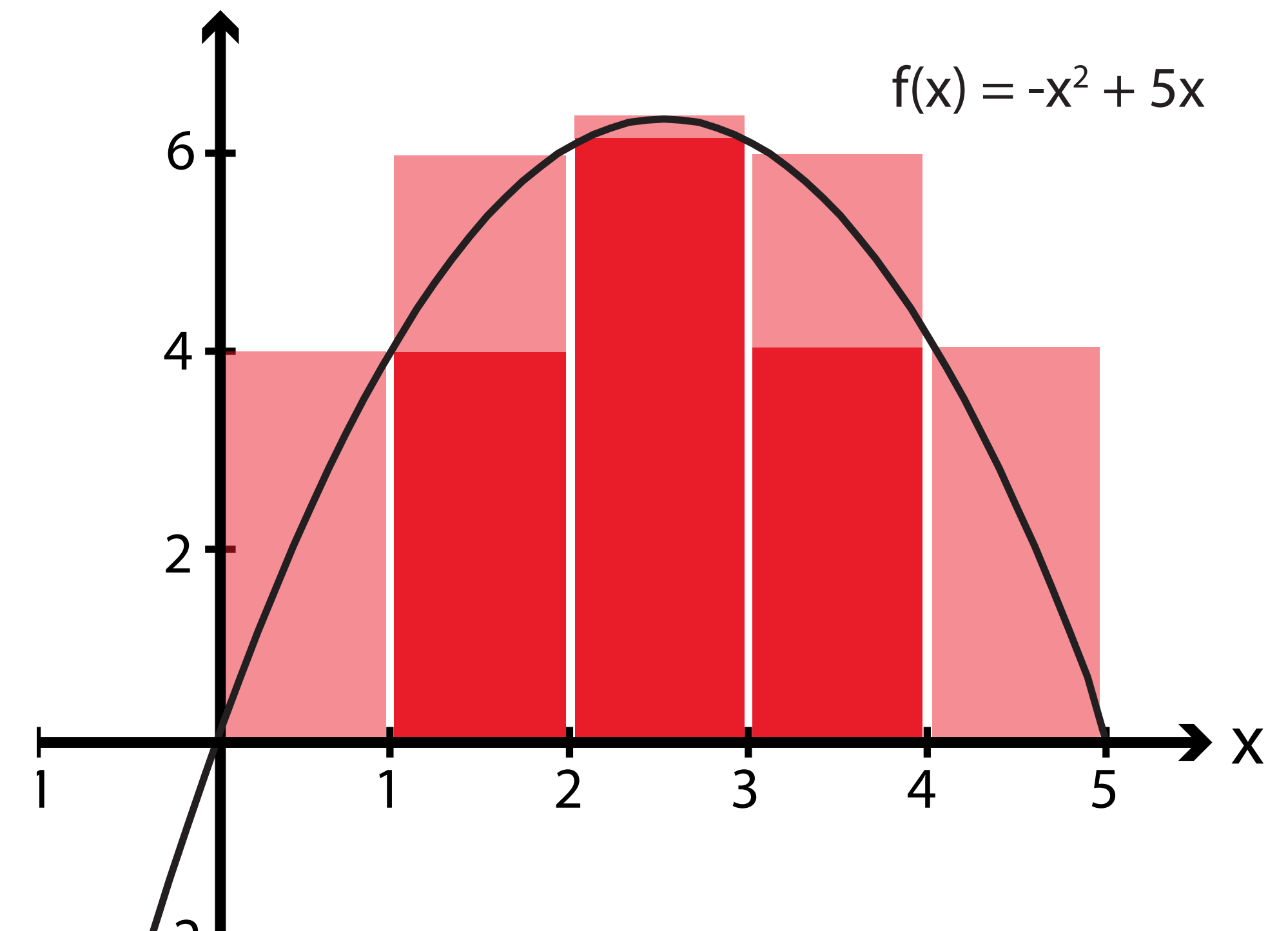
Integralrechnung

Mit Integralen berechnen wir Flächen unter einer Funktion.

Grundidee ist die Näherung über Rechtecke mit einer festen Breite und einer von den Funktionswerten abhängigen Höhe:

Bei der **Obersumme** wird das Maximum innerhalb der Rechteckbreite als Höhe verwendet.

Bei der **Untersumme** wird das Minimum innerhalb der Rechteckbreite als Höhe verwendet.



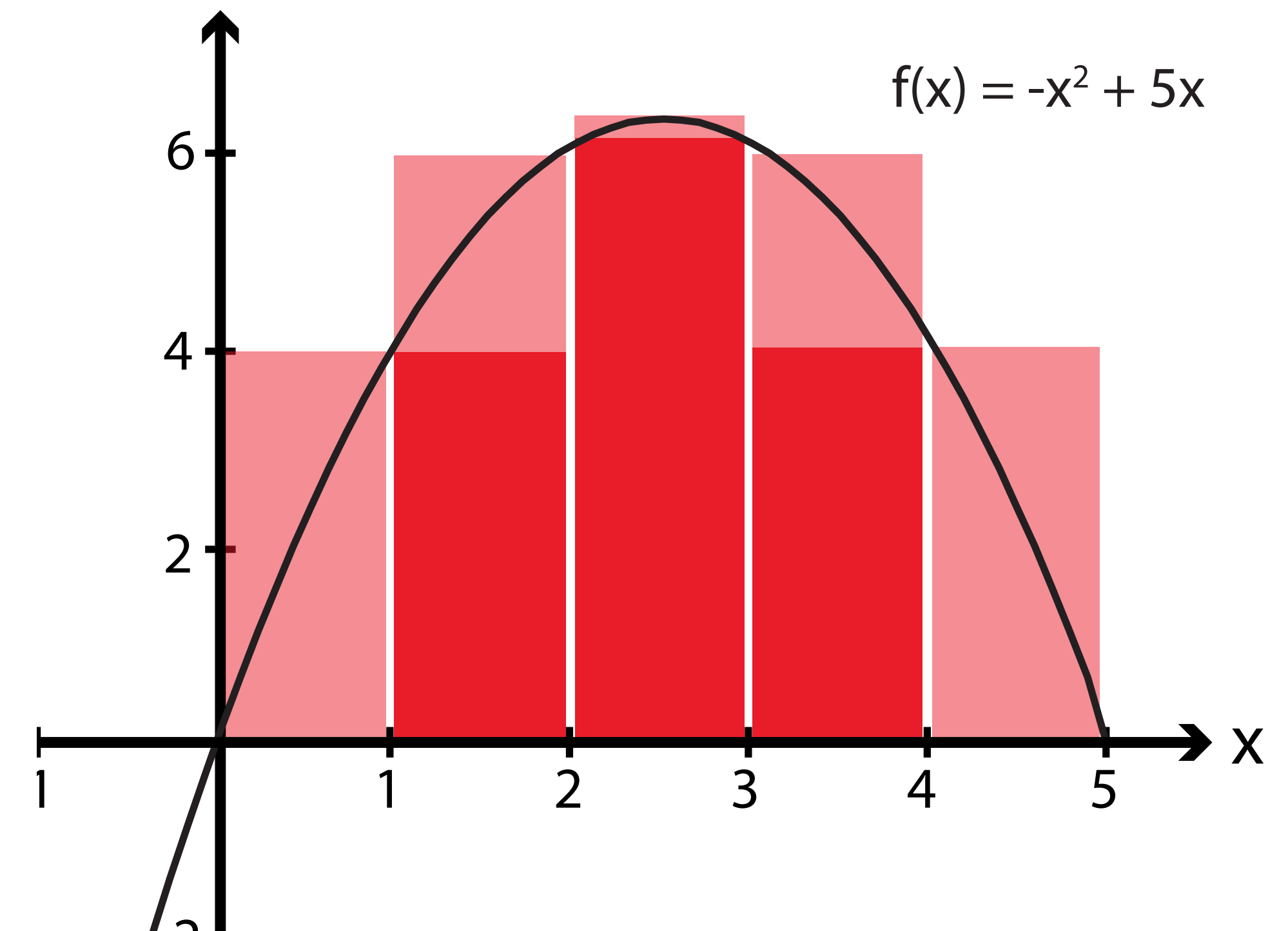
Integralrechnung

Die Obersumme überschätzt die wahre Fläche, während die Untersumme die wahre Fläche unterschätzt.

$$\text{Obersumme } A \approx 4 + 6 + 6.25 + 6 + 4 = 26.25$$

$$\text{Untersumme } A \approx 0 + 4 + 6 + 4 + 0 = 14$$

Je breiter die Rechtecke, die für die Näherung genutzt werden, umso größer ist tendenziell auch die Ungenauigkeit.

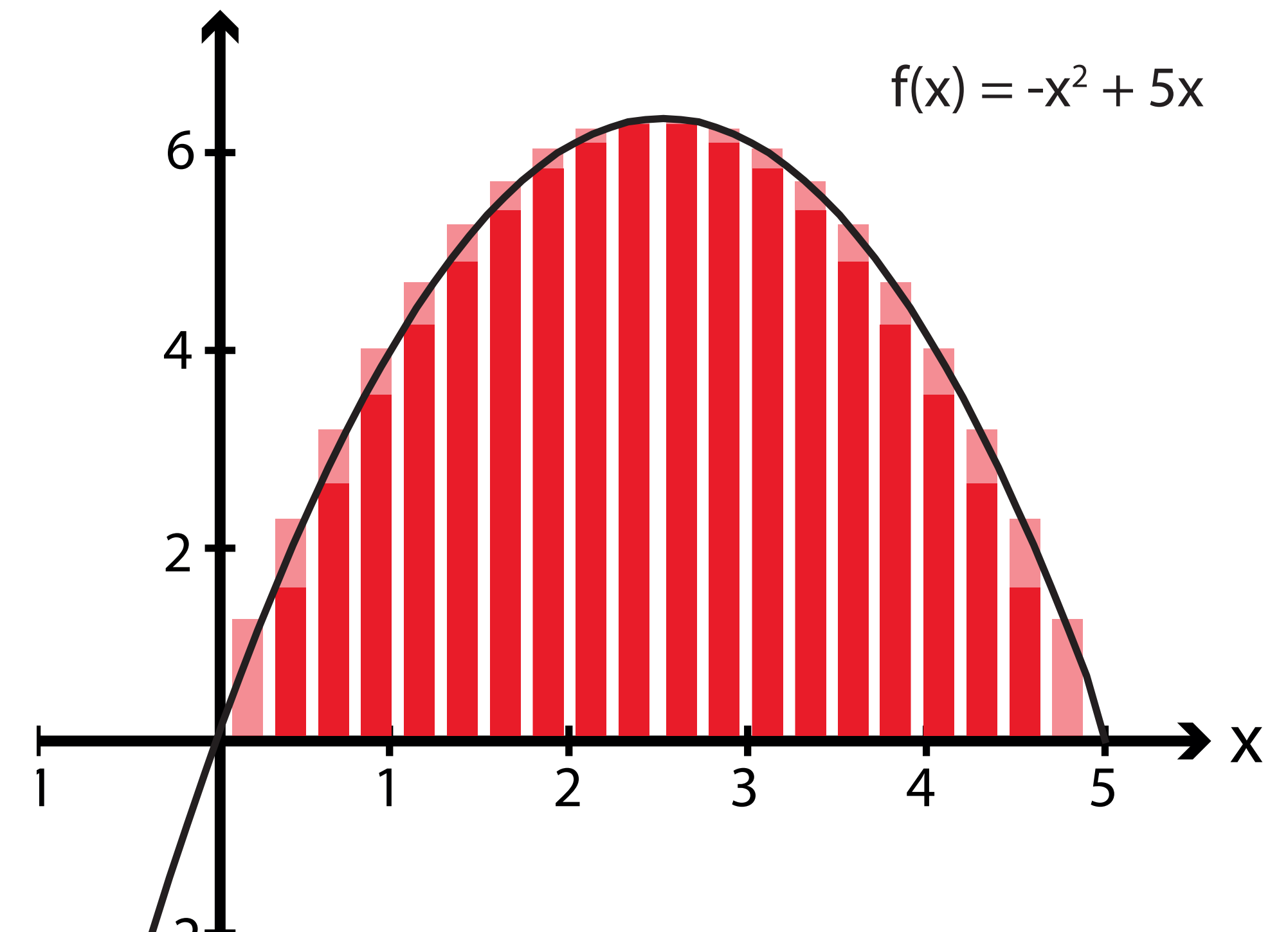


Integralrechnung

Der Gedanke liegt nahe: Was passiert, wenn wir die Rechtecke unendlich klein machen?

Für alle Riemann-integrierbaren Funktionen konvergieren Ober- und Untersummen dann zum wahren Wert der Fläche.

Fast alle Funktionen, die uns begegnen, sind Riemann-integrierbar; insbesondere sind alle Funktionen, die auf einem Intervall I stetig sind, dort auch Riemann-integrierbar!



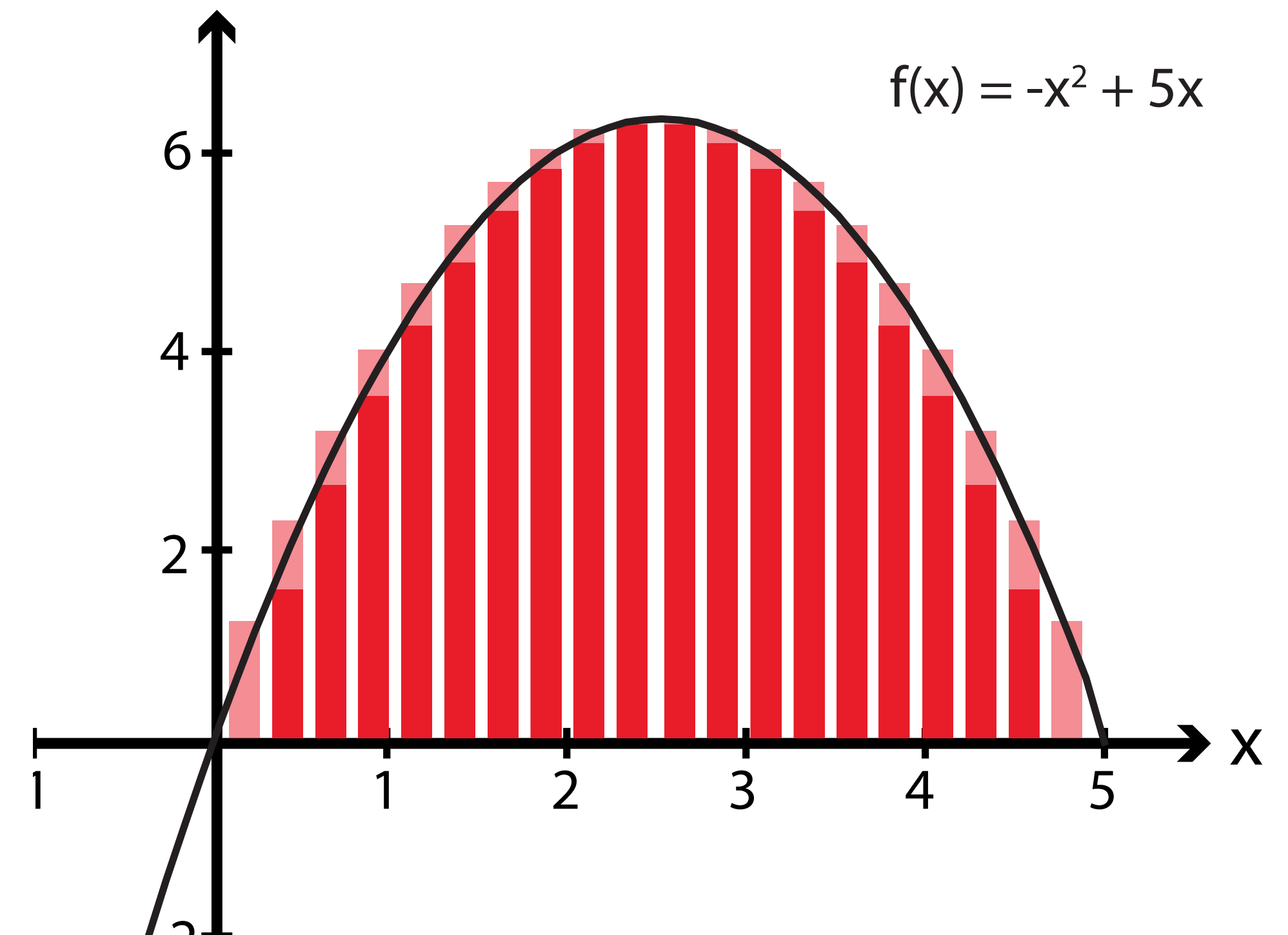
Integralrechnung

Die Integration ist die Umkehrung der Differenziation. Wir suchen eine **Stammfunktion** $F(x)$, für die gilt:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Wir lösen diese Gleichung durch Integration der Funktion $f(x)$.

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \iff F(x) = \int f(x) dx$$



Integralrechnung

Die Regeln für die Integration einzelner Terme sind Umkehrungen der zu diesen Termen gehörenden Ableitungsregeln.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)}$$

Potenzregel

für $b \neq -1$

$$f(x) = a \cdot x^b$$

$$F(x) = \frac{1}{b+1} a \cdot x^{b+1}$$

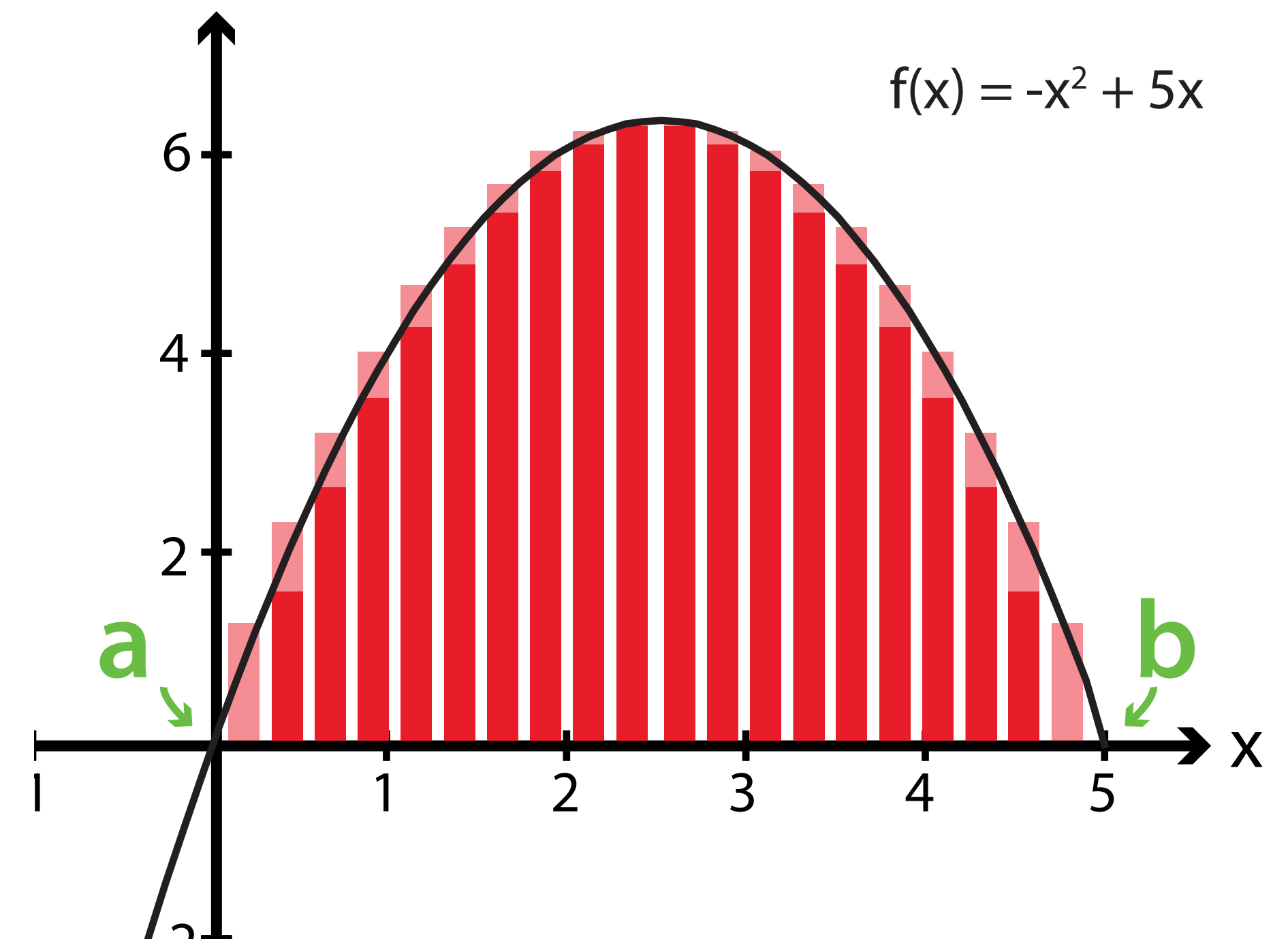
$$F(x) = \frac{1}{b+1} a \cdot x^{b+1}$$

Integralrechnung

Ohne Grenzen berechnen wir ein **unbestimmtes Integral** und erhalten passende Stammfunktionen als Lösung.

Sind Grenzen angegeben, berechnen wir ein **bestimmtes Integral** und können den Hauptsatz der Integralrechnung anwenden:

$$A = \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

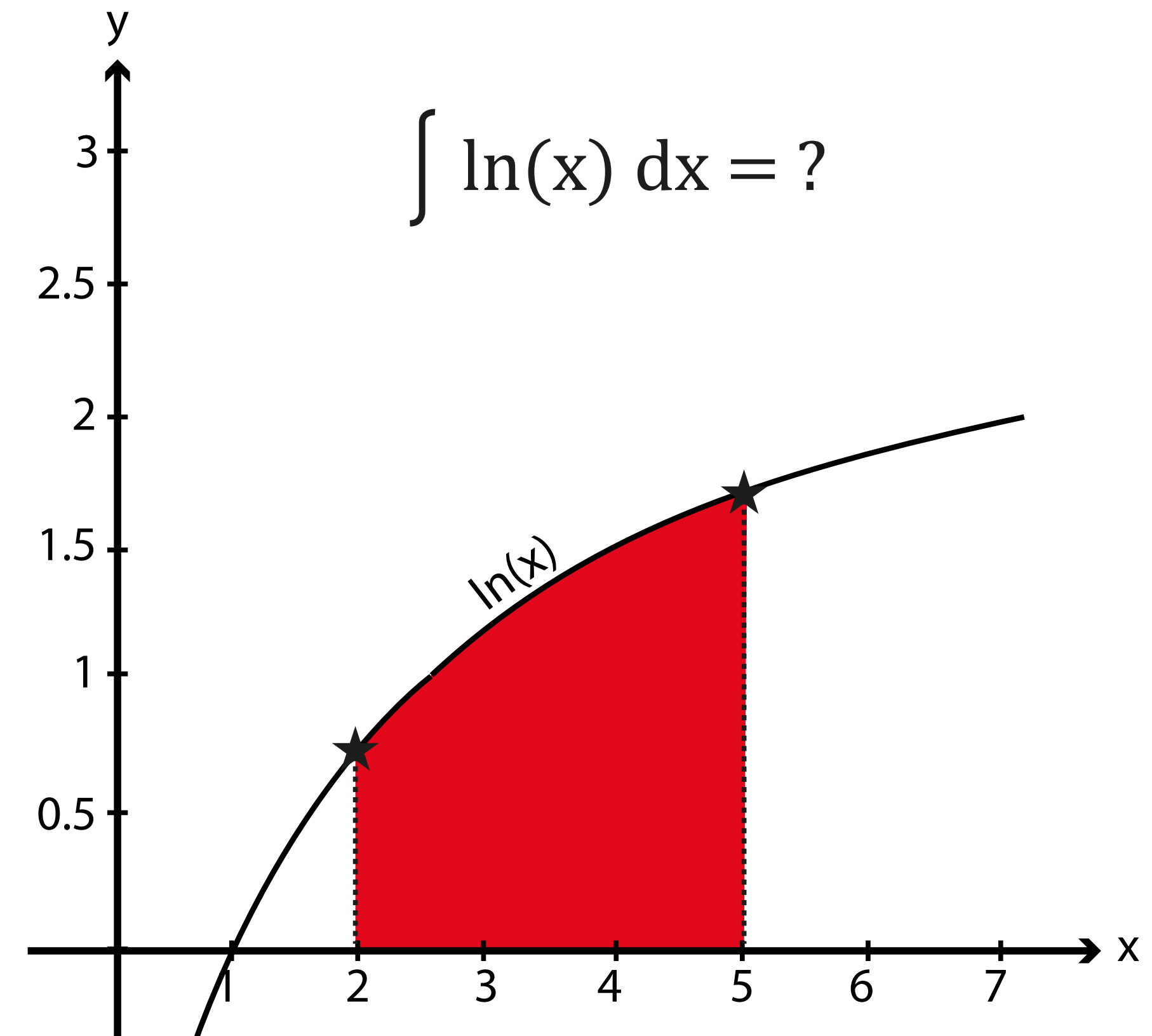


Partielle Integration

Viele Stammfunktionen lassen sich nur mit diversen Tricks berechnen. Zu den wichtigsten zählen die partielle Integration und die Substitution.

Die **partielle Integration** hilft, wenn wir über ein Produkt von zwei Funktionen integrieren, bei denen wir nur von einer die Stammfunktion kennen:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = \left[f(x) \cdot g(x) \right] - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

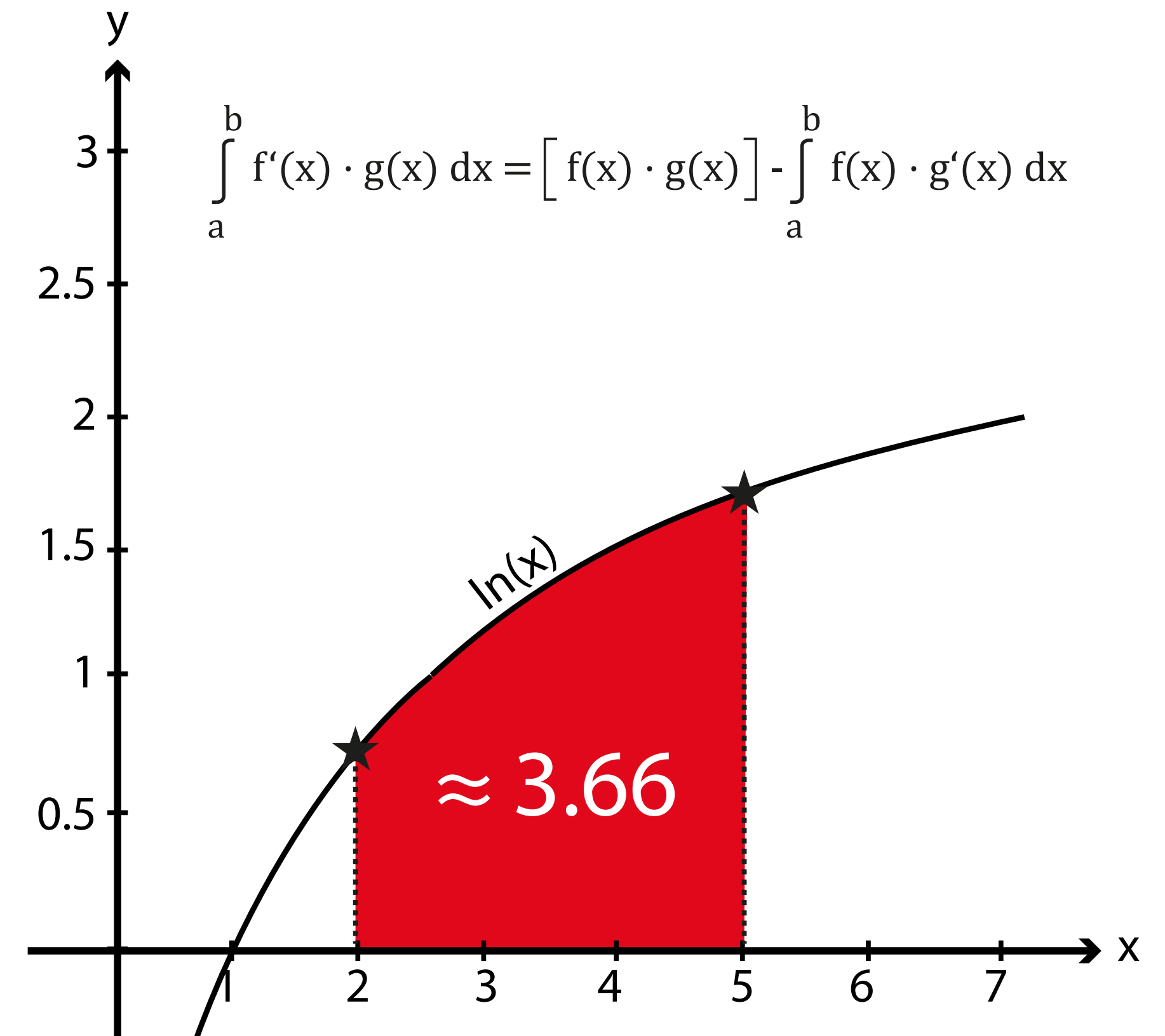


Partielle Integration

Mit der partiellen Integration können wir den Logarithmus integrieren!

$$h(x) = \ln(x) = \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}$$

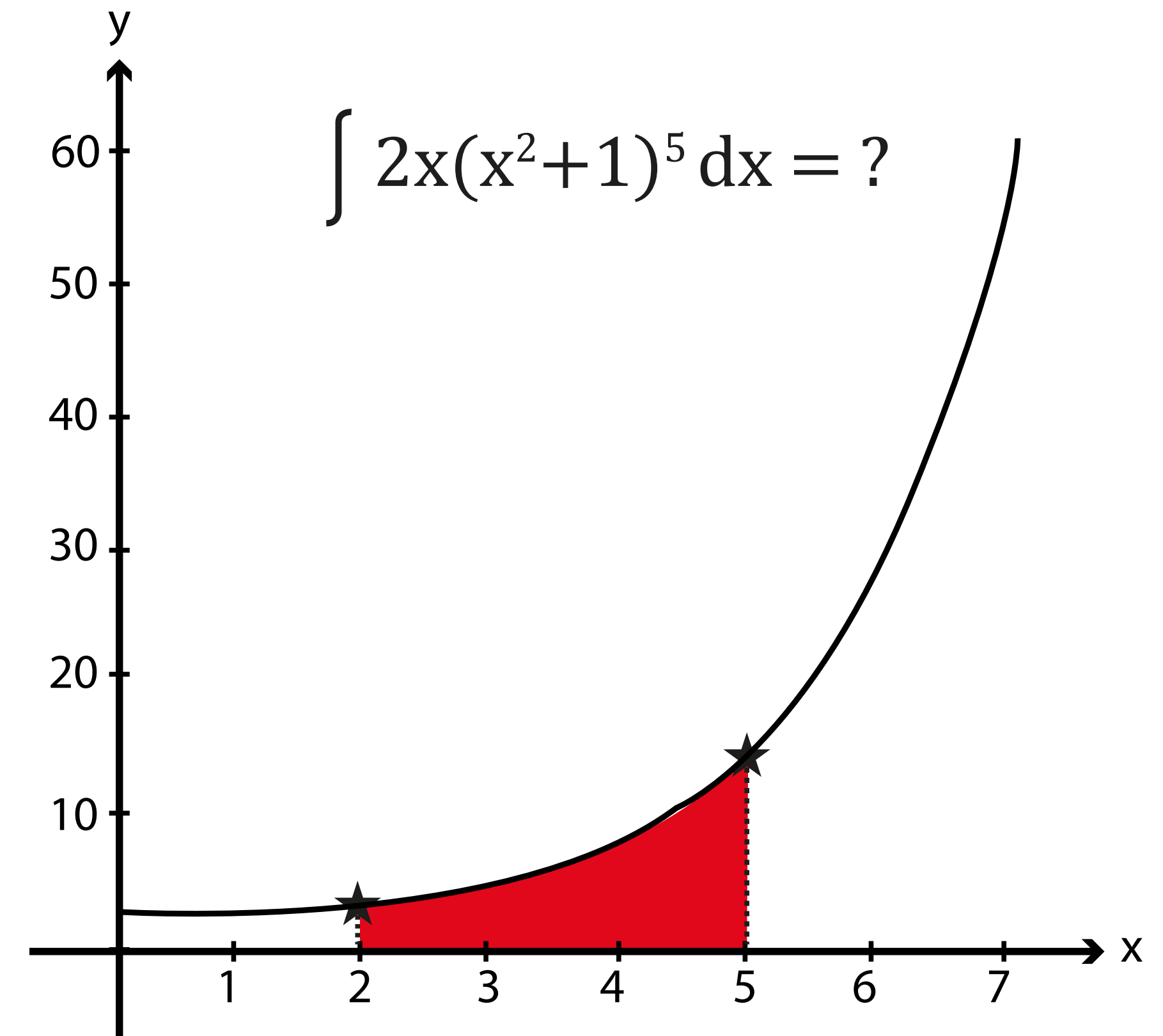
$$\begin{aligned} H(x) &= \left[\underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} \right] - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} dx = \left[x \cdot \ln(x) \right] - \int dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x \end{aligned}$$



Integration durch Substitution

Bei der **Integration durch Substitution** kehren wir die Kettenregel der Ableitung um:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du$$



Integration durch Substitution

Substitution: $\int \underbrace{2x}_{g'(x)} \underbrace{(x^2+1)^5}_{f(g(x))} dx = \int 2x (u)^5 \frac{du}{2x} = \int u^5 du = \frac{1}{6} u^6$
 mit $g(x) = x^2+1$

Nebenrechnung: $u = g(x) = x^2 + 1 \quad \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$

Rücksubstitution: $\frac{1}{6} u^6 = \frac{1}{6} (x^2+1)^6$

Partielle Integration & Substitution

Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx =$$

$$\int x \cdot \ln(x^2) dx =$$

$$\int \ln(\sqrt{x}) dx =$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx =$$

Substitution:

$$\int \underbrace{\frac{\overbrace{x^3}^{0.25 \cdot g'(x)}}{\sqrt{1+x^4}}}_{f(g(x))} dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{u}} \frac{du}{4x^3} = \int \frac{1}{4\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \sqrt{u}$$

Nebenrechnung:

$$u = g(x) = 1+x^4 \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$$

Rücksubstitution:

$$\frac{1}{2} \sqrt{u} = \frac{1}{2} \sqrt{1+x^4}$$

Substitution: $\int \overbrace{x \cdot \ln(x^2)}^{0.5 \cdot g'(x)} dx = \int 0.5 \ln(u) du = 0.5(u \cdot \ln(u) - u)$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{f(g(x))}$

Nebenrechnung: $u = g(x) = x^2 \quad \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$

Rücksubstitution: $0.5(u \cdot \ln(u) - u) = 0.5(x^2 \cdot \ln(x^2) - x^2) = 0.5x^2(\ln(x^2) - 1)$

$$H(x) = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(\sqrt{x})}_{g(x)}$$

$$H(x) = x \cdot \ln(\sqrt{x}) - \int x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= x \cdot \ln(\sqrt{x}) - \int 0.5 dx$$

$$= x \cdot \ln(\sqrt{x}) - 0.5x$$

$$H(x) = \int \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{x^{-1}}_{f'(x)} dx \quad \leftarrow \text{same}$$

$$H(x) = \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x^{-1}}_{g'(x)} dx$$

$$\Rightarrow 2 \int \ln(x) \cdot x^{-1} dx = \ln(x) \cdot \ln(x)$$

$$\Rightarrow H(x) = 0.5 (\ln(x))^2$$

Integrale über Skalarfelder

Wir verallgemeinern die Integralrechnung auf Skalarfelder mit zwei Dimensionen:

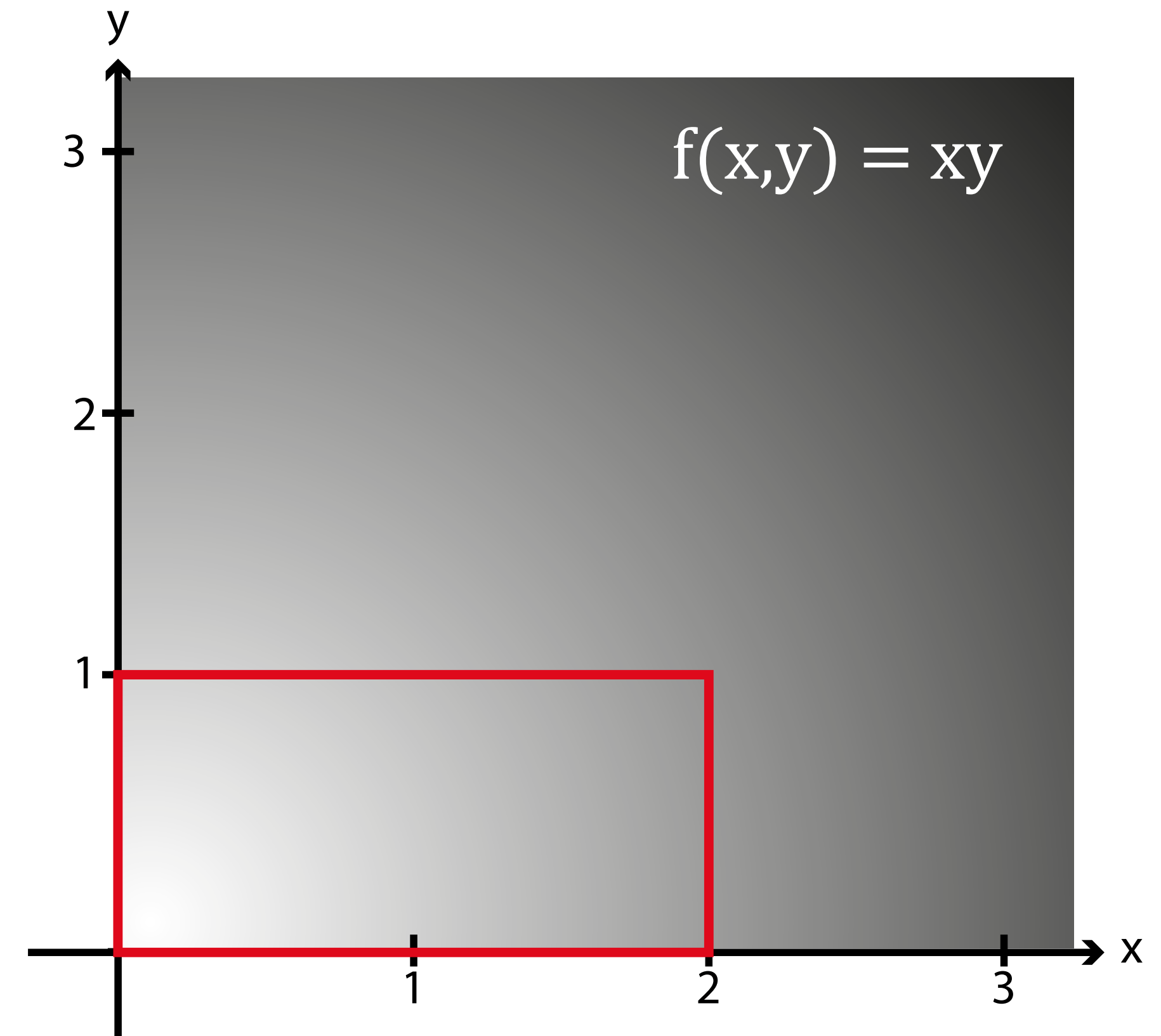
$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Im einfachsten Fall besteht unsere Funktion aus einem Produkt von zwei Funktionen $f_x(x)$ und $f_y(y)$. Beispiel:

$$\int_0^1 \int_0^2 x \cdot y \, dx \, dy$$

Inneres Integral

Äußeres Integral



Integrale über Skalarfelder

Da $f_y(y)$ nicht von x abhängt, können wir diesen Term bezüglich des Integrals über dx wie eine Konstante behandeln.

$$\int_{a_y}^{b_y} \int_{a_x}^{b_x} f_x(x) f_y(y) dx dy = \int_{a_y}^{b_y} \left[f_y(y) \int_{a_x}^{b_x} f_x(x) dx \right] dy$$

Danach berechnen wir die beiden Integrale mit den altbekannten Regeln von innen nach außen.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 xy dx dy &= \int_0^1 \left[y \int_0^2 x dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[y \left[0.5x^2 \right]_0^2 \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[2y \right] dy = \int_0^1 2y dy = \left[y^2 \right]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

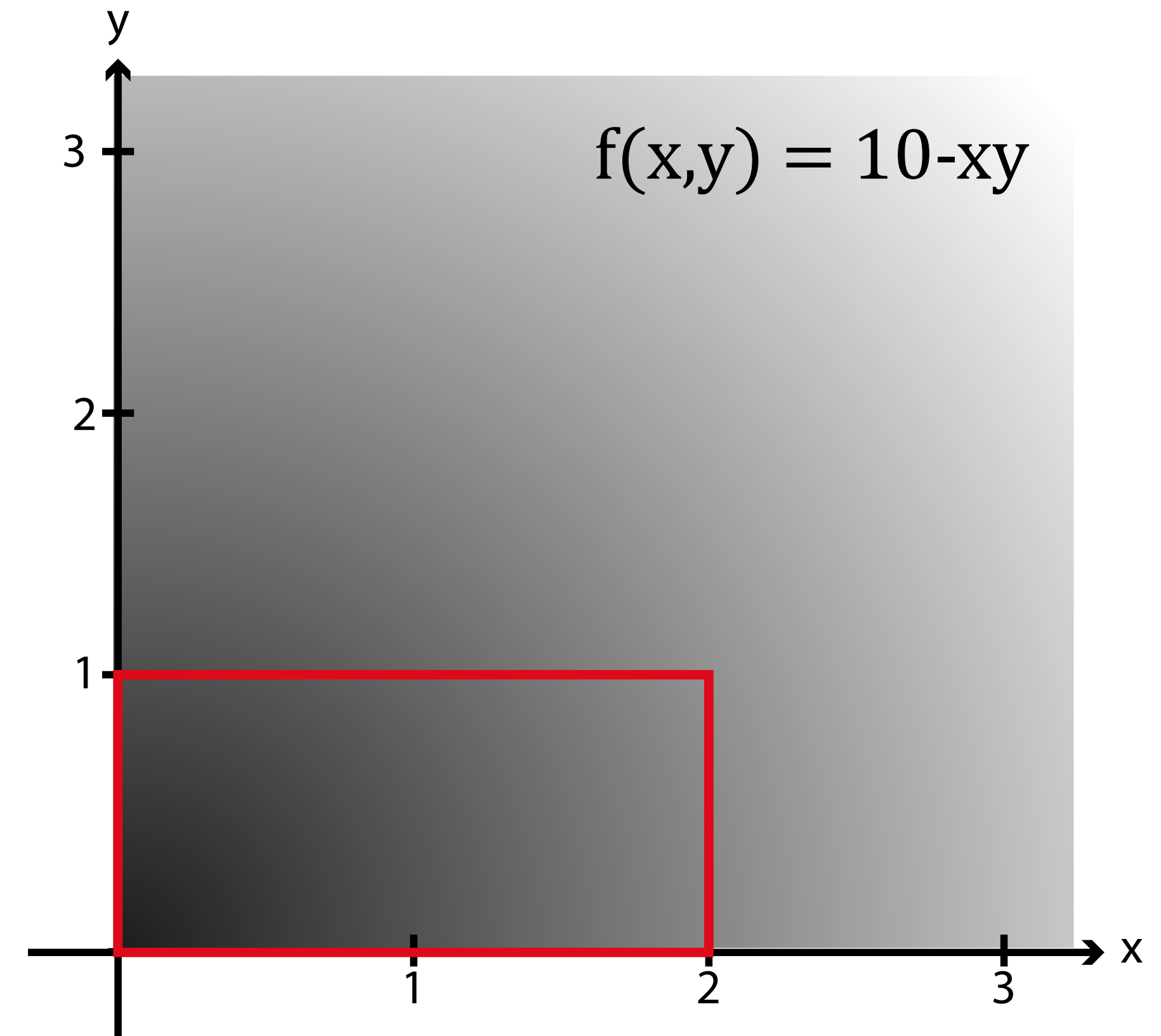
Integrale über Skalarfelder

Was passiert, wenn uns eine Konstante im Integral an der Anwendung dieses einfachen Tricks hindert?

$$\int_0^1 \int_0^2 10 - x \cdot y \, dx \, dy$$

Inneres Integral

Äußeres Integral



Integrale über Skalarfelder

Integrale über Summanden können getrennt werden. Wir berechnen zuerst das Integral über die Konstante nach dx ...

$$\int_{a_y}^{b_y} \int_{a_x}^{b_x} f_x(x) f_y(y) + c \, dx \, dy = \int_{a_y}^{b_y} \left[f_y(y) \int_{a_x}^{b_x} f_x(x) \, dx + c(b_x - a_x) \right] dy$$

... danach berechnen wir erneut die beiden Integrale von innen nach außen.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 -xy + 10 \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[-y \int_0^2 x \, dx + 10(2-0) \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[-y \left[0.5x^2 \right]_0^2 + 20 \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[-y \cdot 2 + 20 \right] dy \\ &= \int_0^1 -2y + 20 \, dy = \left[-y^2 + 20y \right]_0^1 = 19 \end{aligned}$$

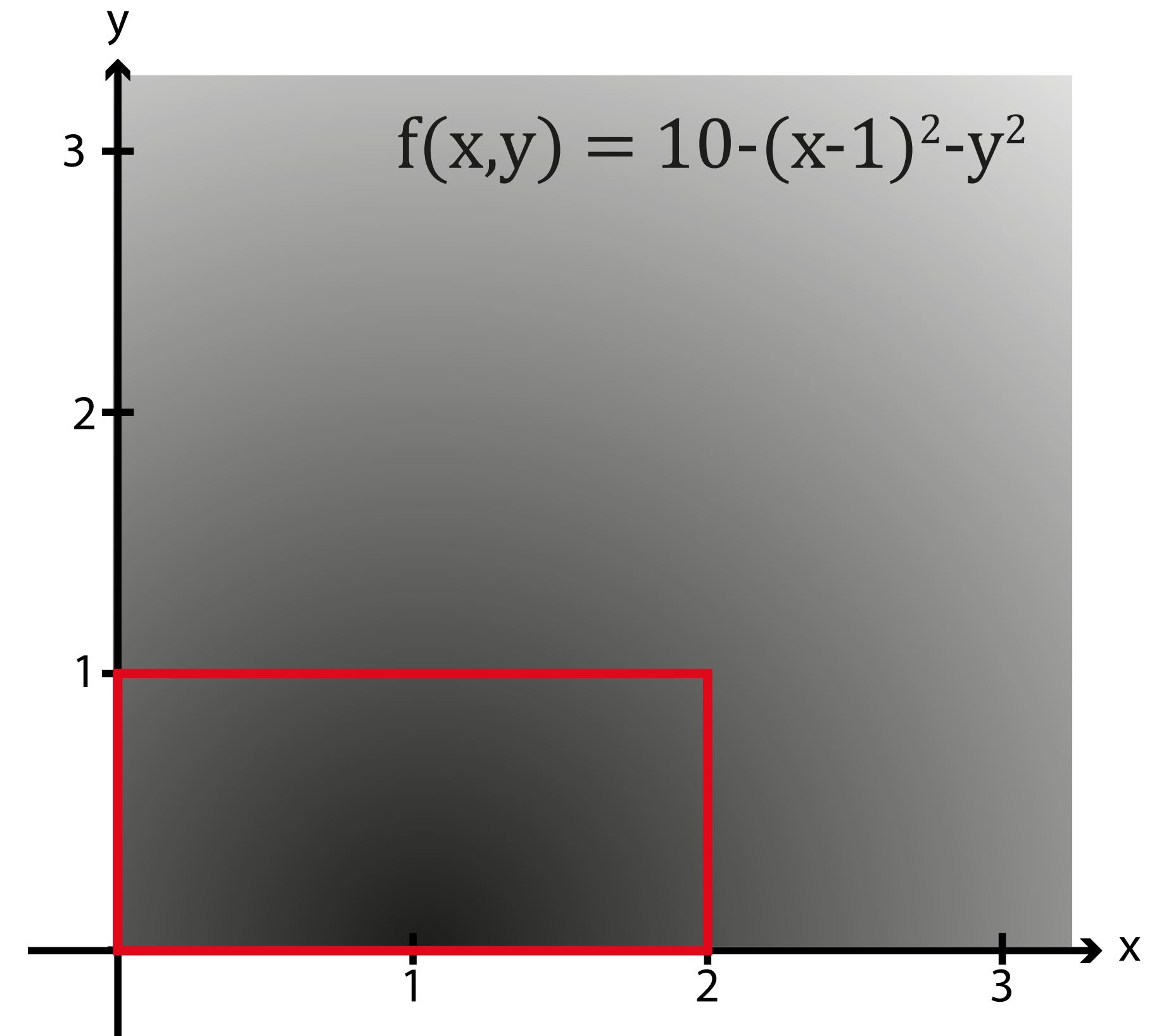
Integrale über Skalarfelder

Was passiert, wenn die beiden Teilfunktionen additiv verknüpft sind? Bei folgender Funktion kann $f_y(y)$ nicht aus dem inneren Integral entfernt werden!

$$\int_0^1 \int_0^2 10 - (x-1)^2 - y^2 \, dx \, dy$$

Inneres Integral

Äußeres Integral



Integrale über Skalarfelder

Integrale über Summanden können getrennt werden, d.h.:

$$\int_{a_y}^{b_y} \int_{a_x}^{b_x} f_x(x) + f_y(y) + c \, dx \, dy = \int_{a_y}^{b_y} \left[\int_{a_x}^{b_x} f_x(x) + c \, dx + \int_{a_x}^{b_x} f_y(y) \, dx \right] dy$$

Wir berechnen die beiden Integrale mit den altbekannten Regeln von innen nach außen.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 10 - (x-1)^2 - y^2 \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[\int_0^2 10 - (x-1)^2 - y^2 \, dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 9x - xy^2 \right]_0^2 \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{58}{3} - 2y^2 \right] dy = \left[\frac{58}{3} y - \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{56}{3} \end{aligned}$$

Integrale über Skalarfelder

Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int_0^4 \int_0^1 x^3 y - 5 \, dx \, dy$$

$$\int_0^4 \int_0^1 x^2 y - xy^2 \, dx \, dy$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_0^1 x^3 y - 5 \, dx \, dy &= \int_0^4 \left[y \int_0^1 x^3 \, dx - 5(1-0) \right] dy \\&= \int_0^4 \left[y \left[0.25x^4 \right]_0^1 - 5 \right] dy \\&= \int_0^4 0.25y - 5 \, dy = \left[0.125y^2 - 5y \right]_0^4 = -18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_0^1 x^2 y - xy^2 \, dx \, dy &= \int_0^4 \left[\int_0^1 x^2 y - xy^2 \, dx \right] dy \\&= \int_0^4 \left[\left[\frac{x^3 y}{3} - 0.5 x^2 y^2 \right]_0^1 \right] dy \\&= \int_0^4 \left[\frac{y}{3} - 0.5 y^2 \right] dy = \left[\frac{y^2}{6} - \frac{y^3}{6} \right]_0^4 = -8\end{aligned}$$

Weitere Integrale

Pfadintegrale, Konturintegrale und Integrale über Vektorfelder werden wir in dieser Vorlesung nicht behandeln, da sie nicht mehr mit dem Hauptsatz der Integralrechnung zu händeln sind.

Wir bräuchten dazu den Satz von Stokes oder den Gaußschen Integralsatz:

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F}_{x,y} d^2A = \oint \vec{F}_{x,y} \cdot \vec{n} dS$$

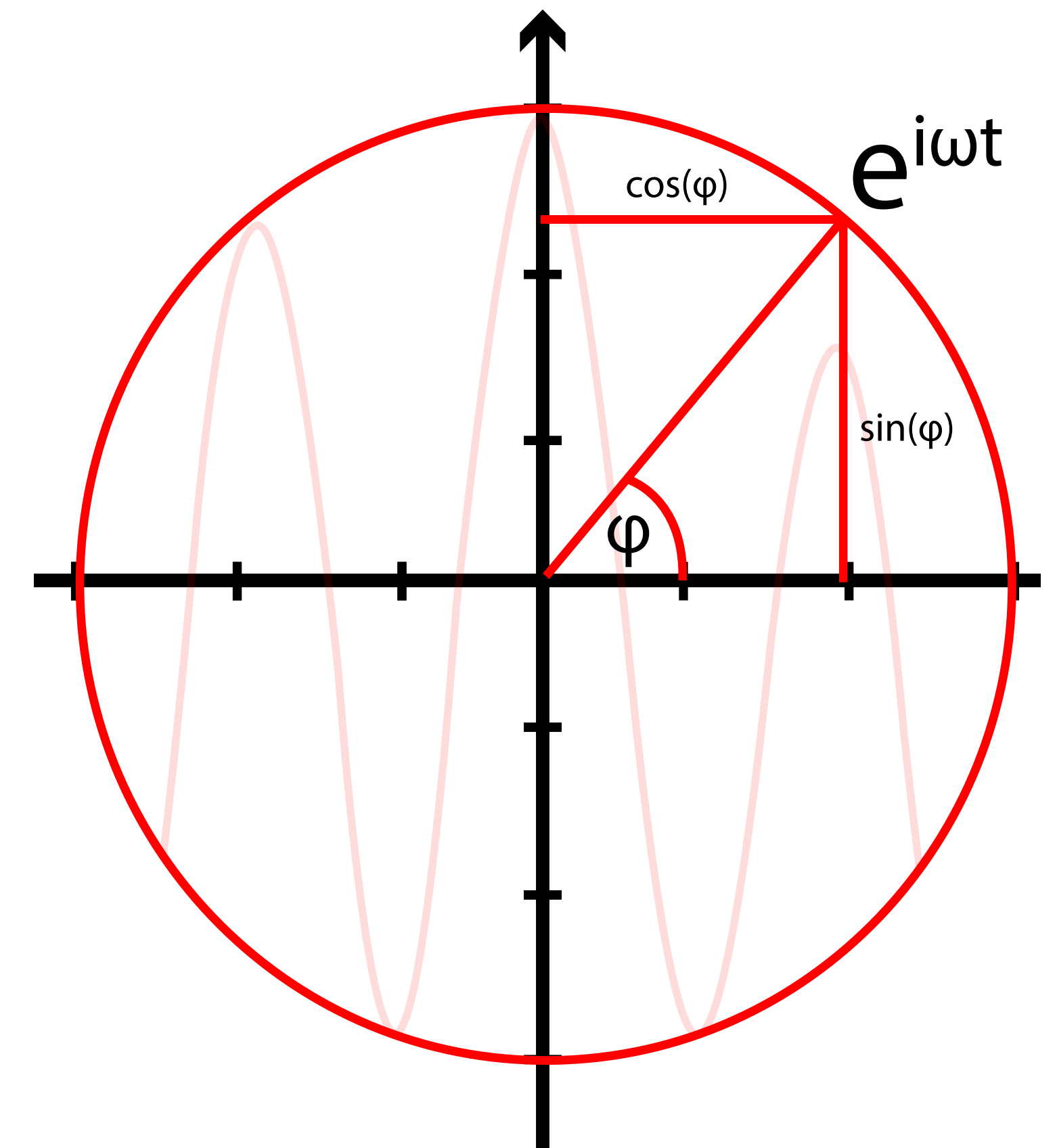


Trigonometrie

Bei Trigonometrie denken wir sofort an Geometrie und Winkelberechnungen. Die in der Trigonometrie verwendeten Funktionen finden sich aber auch im Bereich Data Science:

- $\tanh(x)$ als Aktivierungsfunktion von Neuronen
- $\cos(x)$ bei der Berechnung der Kosinus-Distanz
- $\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ in der Fourier-Analyse

Wir wollen uns einen kurzen Überblick über die entsprechenden Funktionen verschaffen.



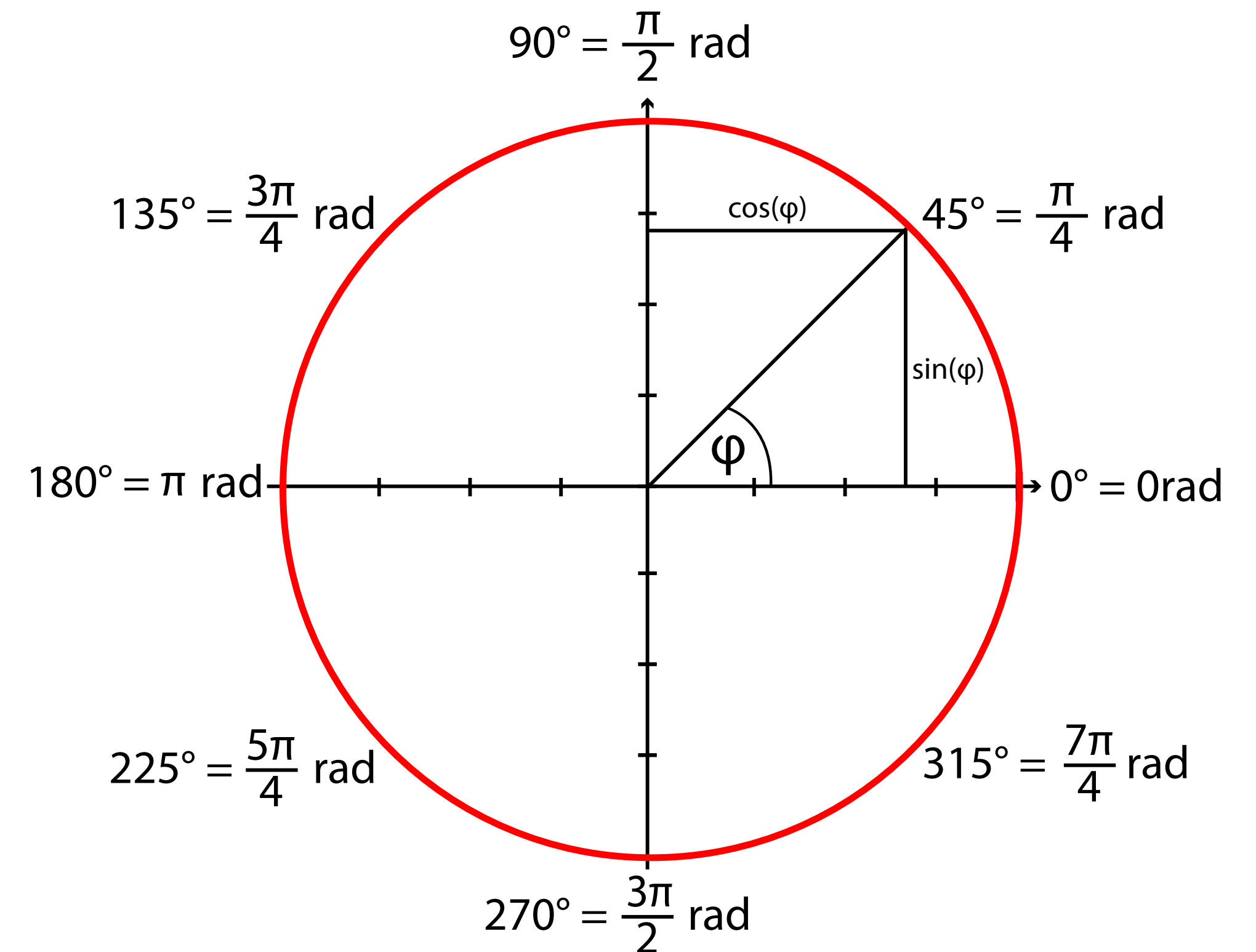
Bogenmaß

Da wir uns nicht für Winkel-, Strecken- und Flächenmessungen interessieren, bietet sich das Bogenmaß an.

Statt einen Kreis in 360° Grad zu teilen, entspricht eine volle Umdrehung einem Winkel von 2π rad.

Ein rechter Winkel hätte zum Beispiel 0.5π rad.

Die Einheit "radian" wird fast immer weggelassen.



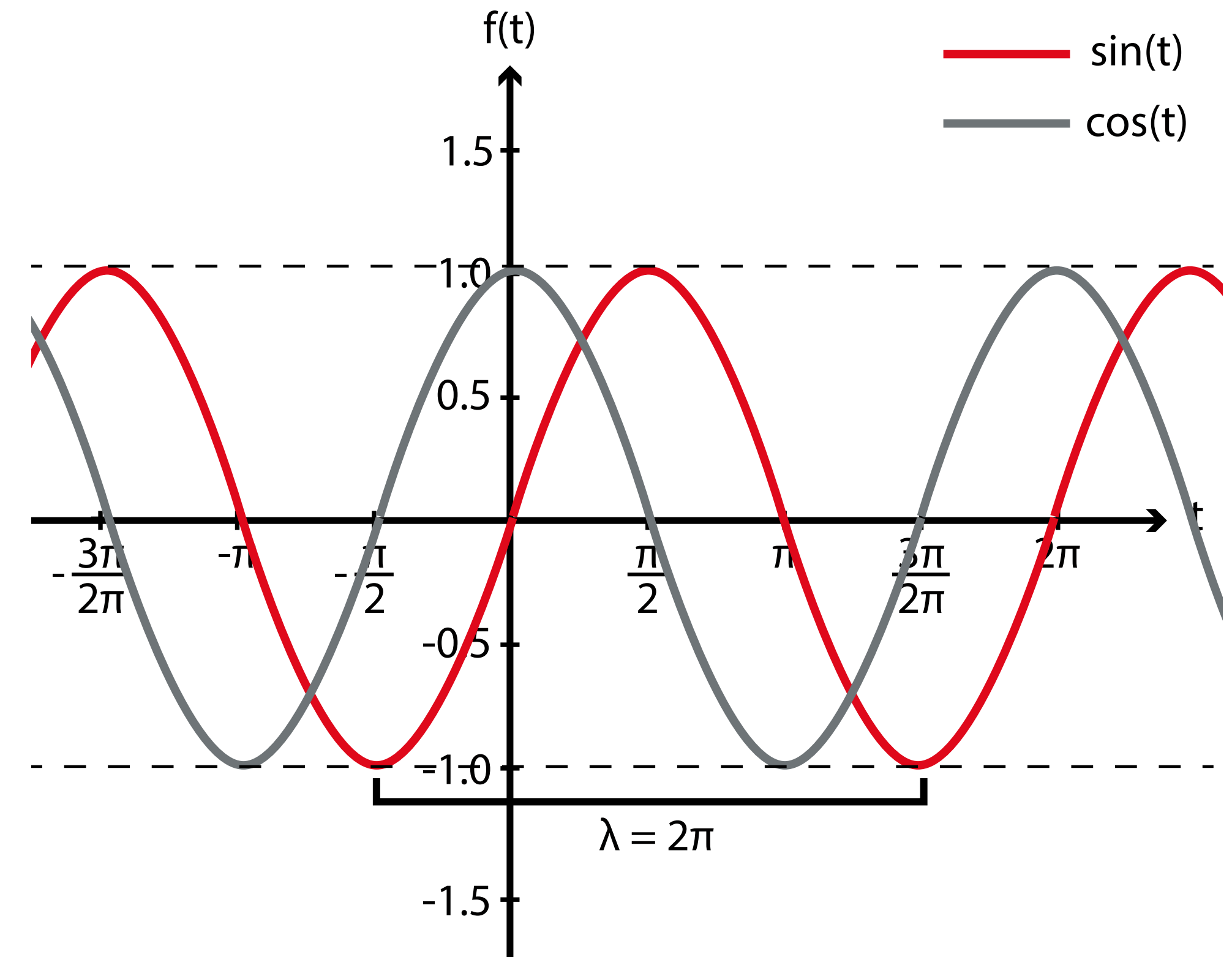
Trigonometrische Funktionen

Die Funktionen $\sin(t)$ und $\cos(t)$ bilden von den reellen Zahlen auf den Bereich -1 bis 1 ab:

$$\sin(t), \cos(t): \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$$

Beide sind periodisch mit einer Wellenlänge von 2π . Der Kosinus hat seinen Namen nicht von ungefähr: Er ist einfach eine Phasenverschiebung des Sinus:

$$\cos(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Trigonometrische Funktionen

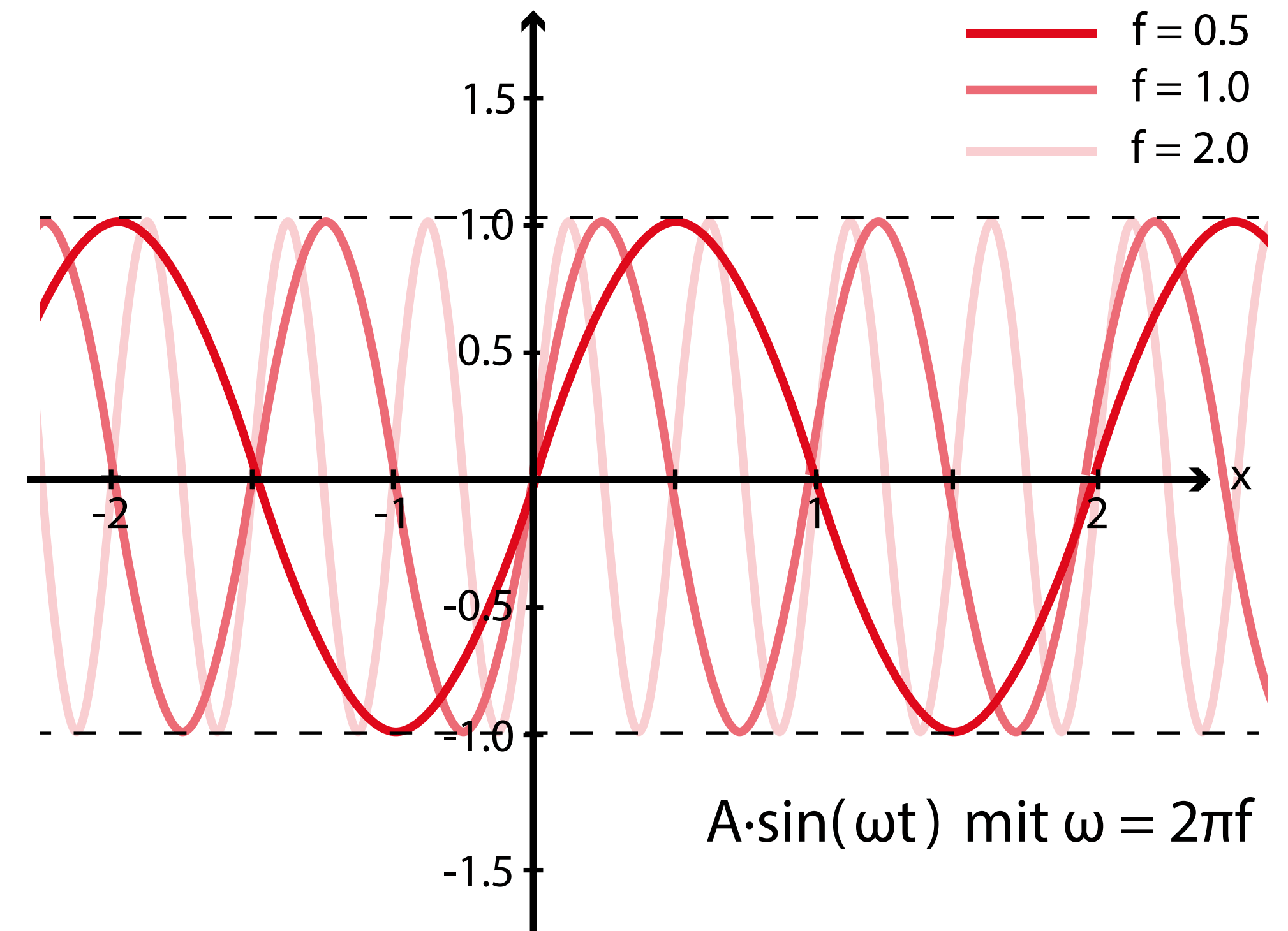
Wir können die Wellenlänge durch einen Faktor im Argument der Sinus- bzw. Kosinusfunktion verändern. Wir definieren die folgenden Größen:

Wellenlänge: Abstand zwischen zwei Extrema

$$\lambda = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frequenz: Anzahl Wiederholungen pro 1

$$f = \frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi}$$



Trigonometrische Funktionen

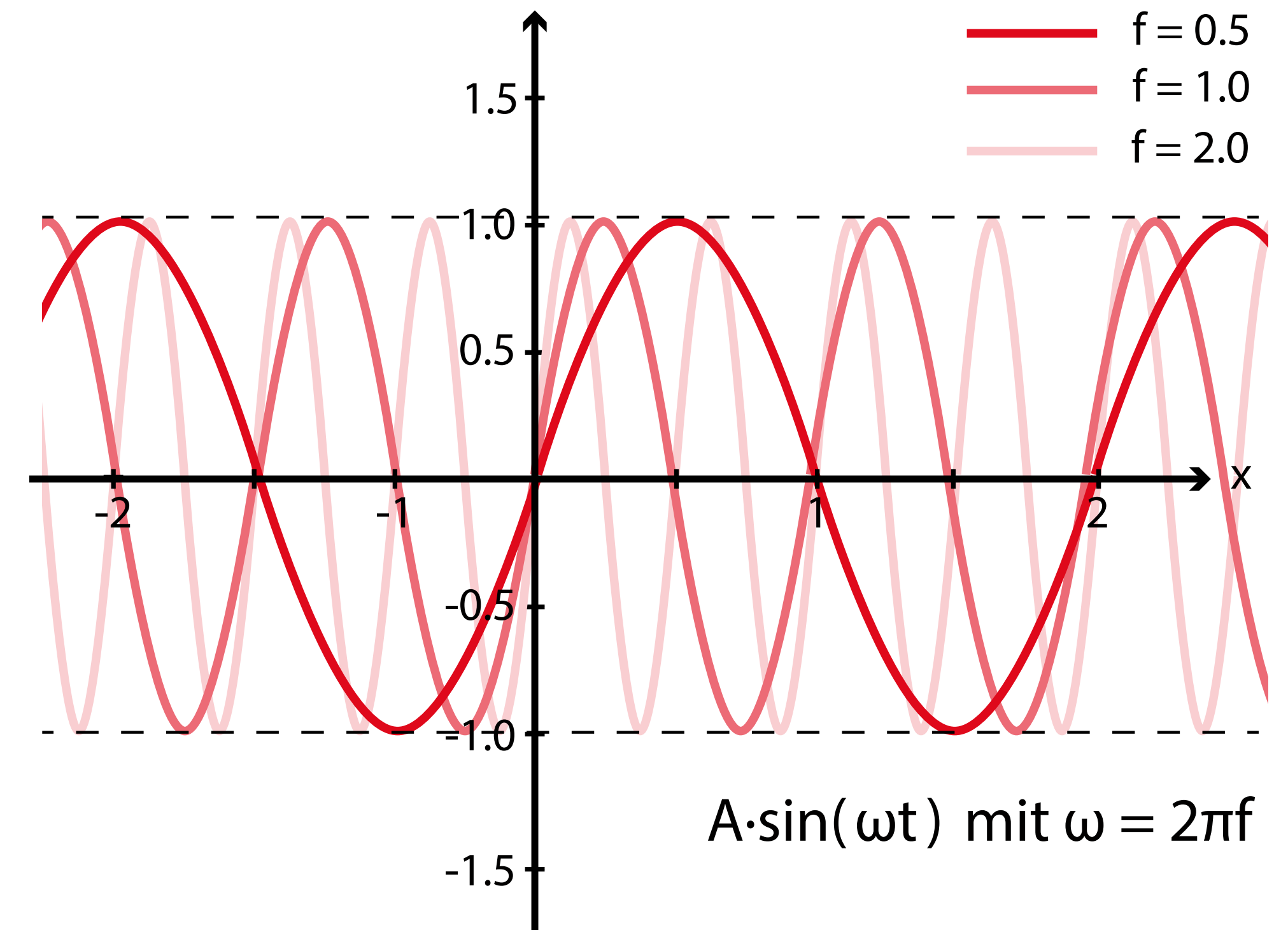
Wir können die Wellenlänge durch einen Faktor im Argument der Sinus- bzw. Kosinusfunktion verändern. Wir definieren die folgenden Größen:

Kreisfrequenz: Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Amplitude: Maximale Auslenkung

$$A = 1$$

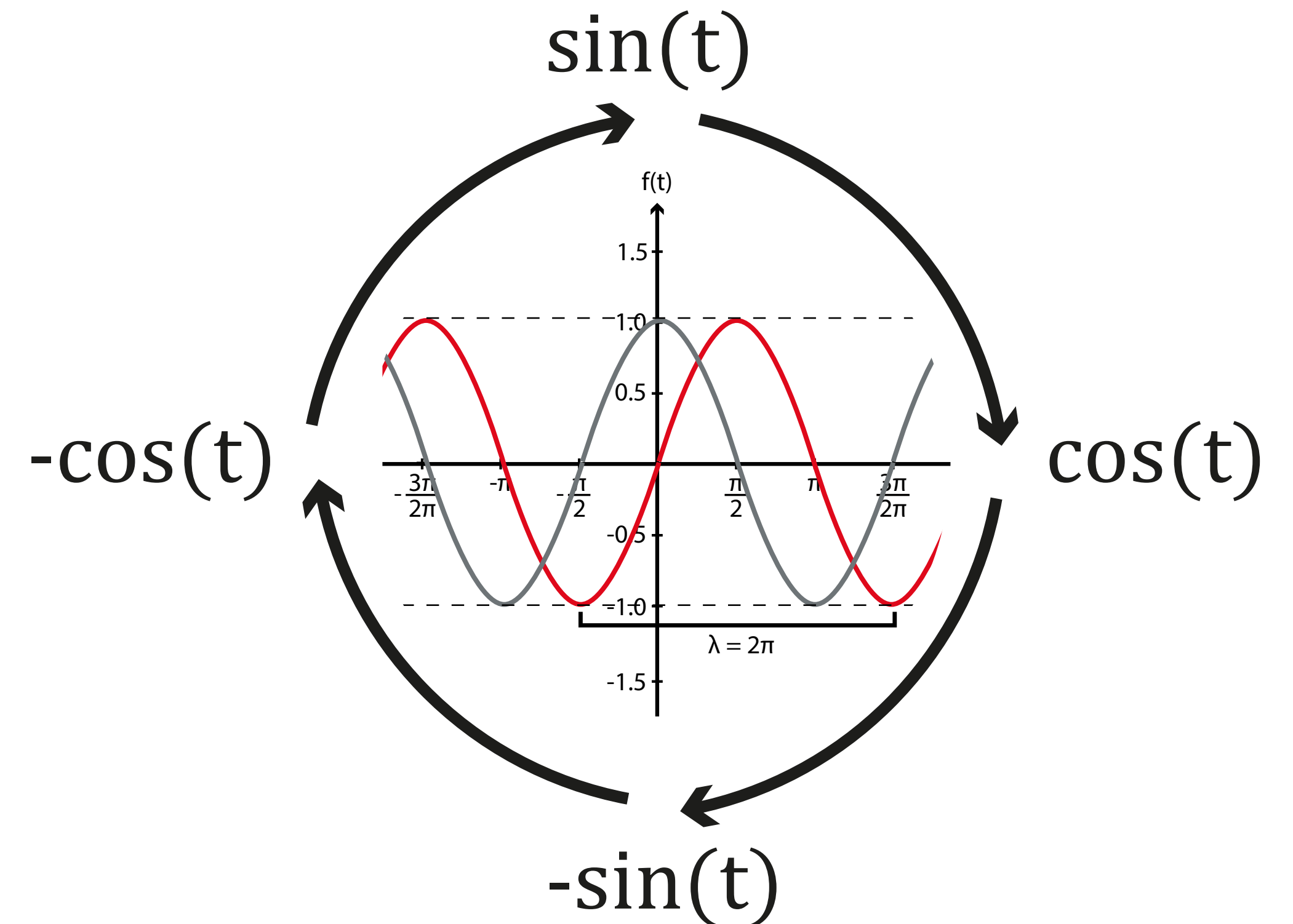


Trigonometrische Funktionen

Sinus und Kosinus sind auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar. Die Ableitungen von Sinus und Kosinus führen uns wortwörtlich im Kreis.

$$\frac{\partial}{\partial t} A \sin(\omega t) = A\omega \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A \cos(\omega t) = -A\omega \sin(\omega t)$$



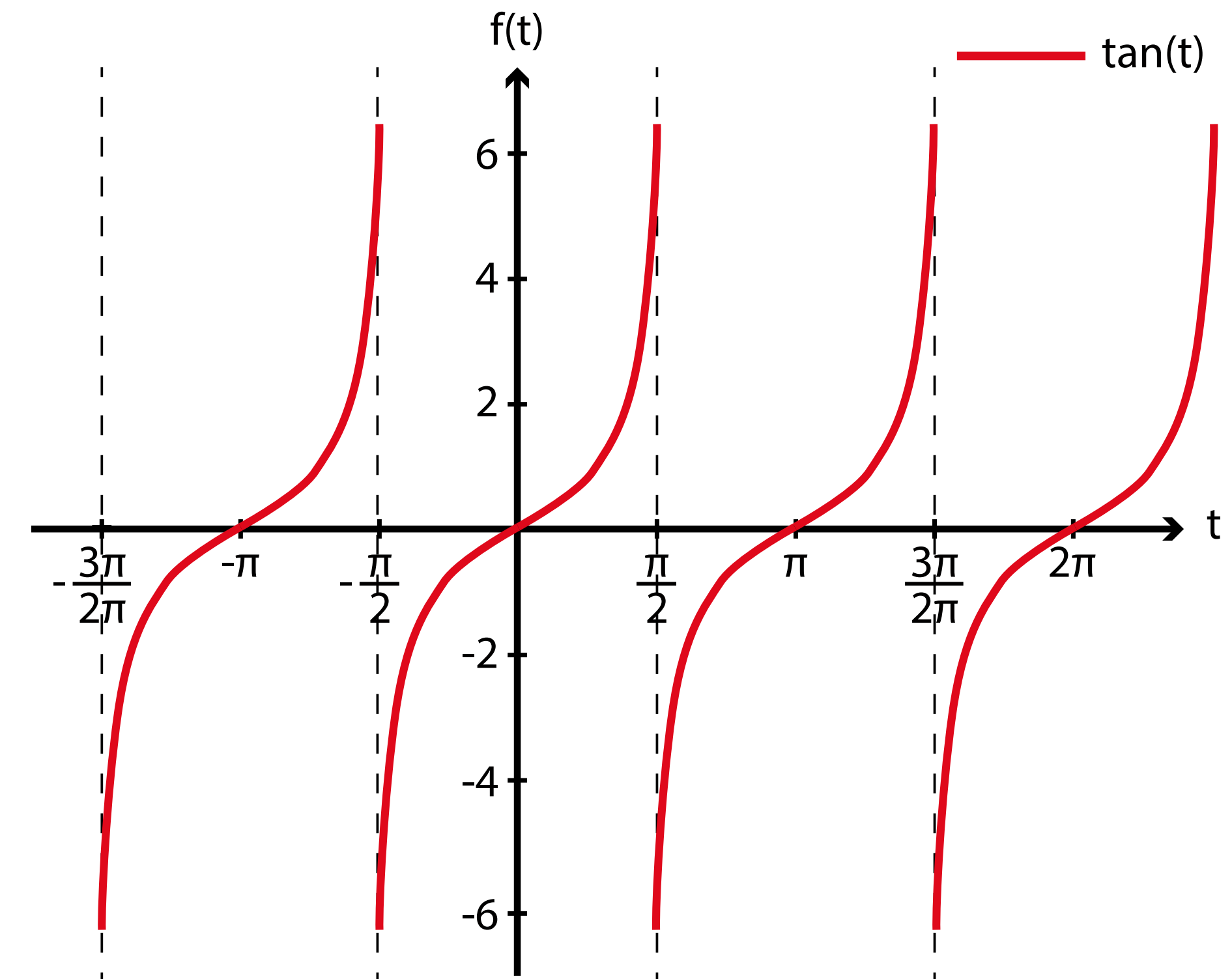
Trigonometrische Funktionen

Der Tangens bildet von den reellen Zahlen, ausgenommen ungerade Vielfache von 0.5π , auf alle reellen Zahlen ab:

$$\tan(t): \{t \in \mathbb{R} \mid t \neq (1+2n) \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Der Tangens kann als Quotient von Sinus und Kosinus definiert werden:

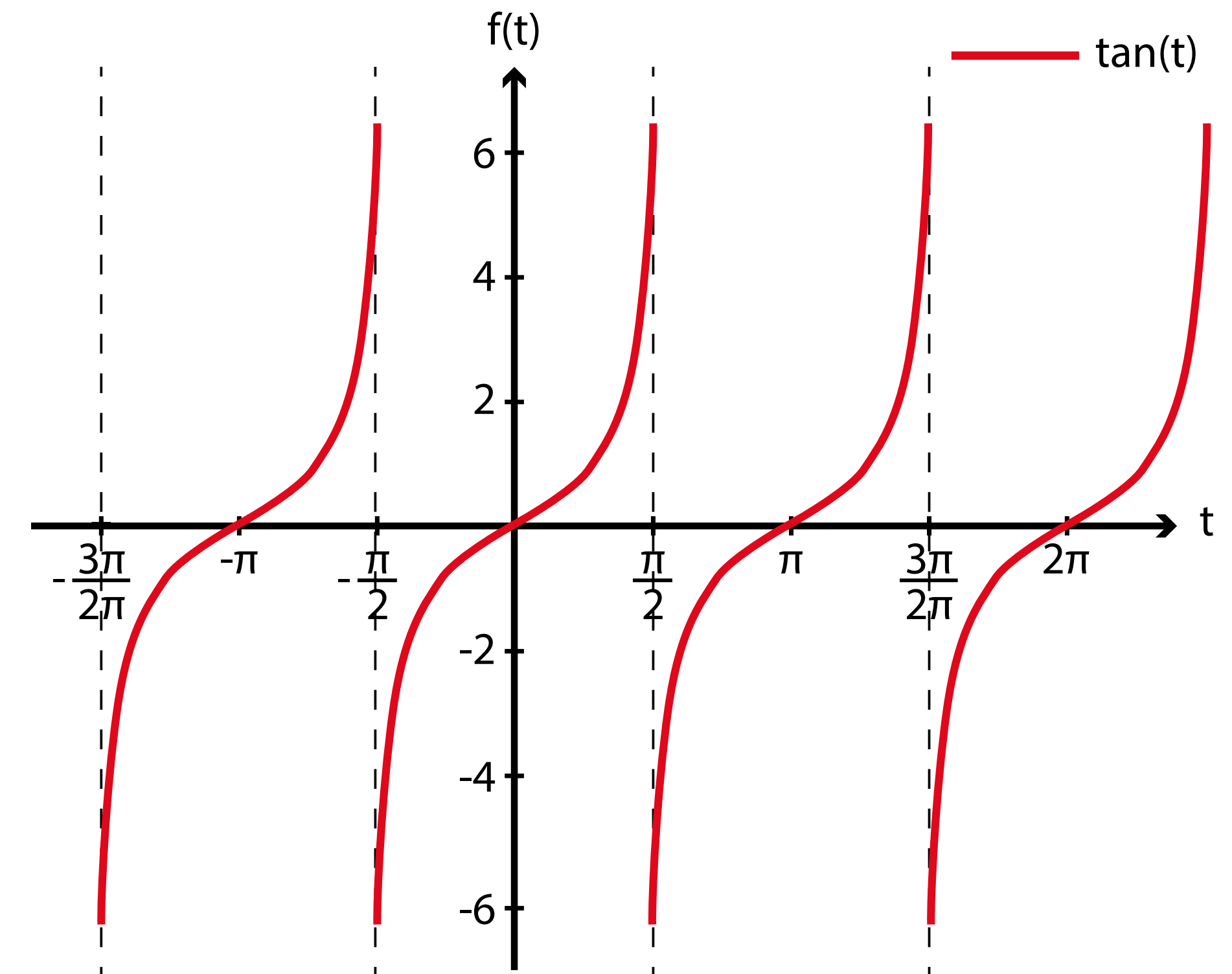
$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{\sin(t)}{\sin(t + \frac{\pi}{2})}$$



Trigonometrische Funktionen

Die Ableitung des Tangens erhalten wir deshalb einfach über die Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \tan(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \\
 &= \frac{\cos(t) \cdot \cos(t) - (-\sin(t) \cdot \sin(t))}{\cos^2(t)} \\
 &= \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)
 \end{aligned}$$



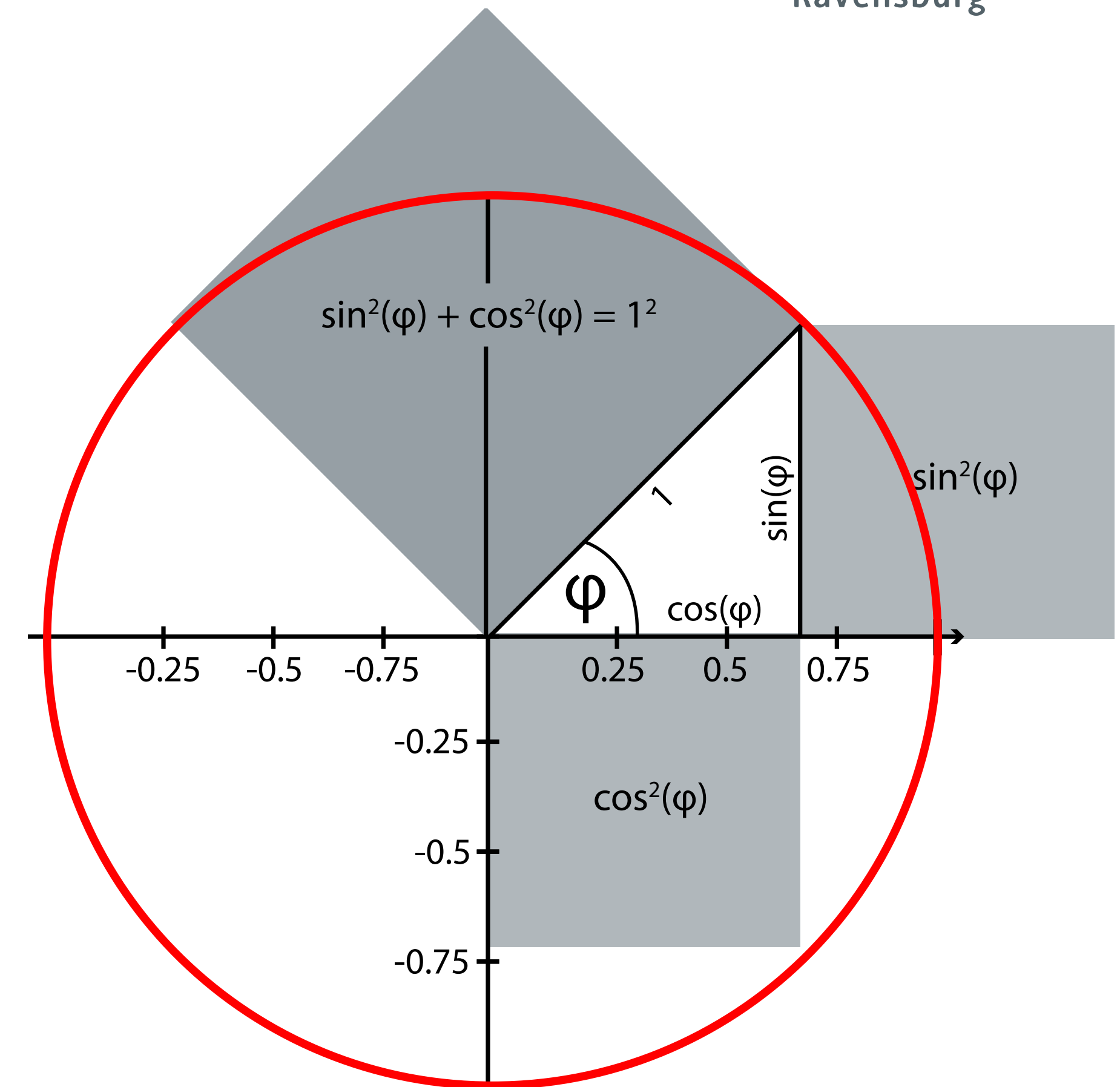
Trigonometrische Funktionen

Alternativ können wir folgenden Zusammenhang ...

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

... verwenden um die Ableitung wie folgt zu formulieren:

$$\frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\cos^2(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)} = \sec^2(t)$$



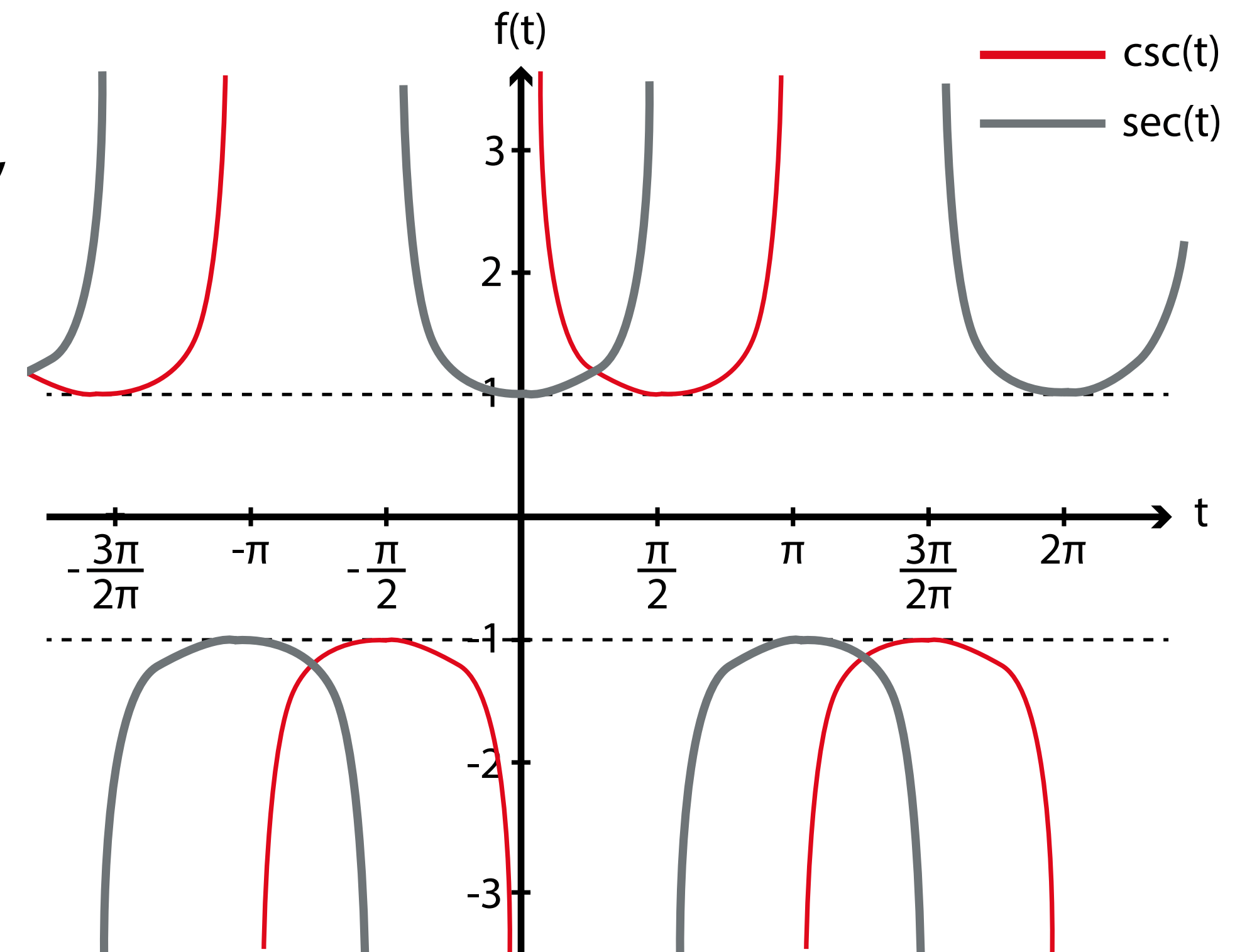
Kehrwerte und Umkehrfunktionen

Dabei entdecken wir auch die Kehrwerte der Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens:

Kosekans: $\csc(t) = \frac{1}{\sin(t)} = \sin^{-1}(t)$

Sekans: $\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)} = \cos^{-1}(t)$

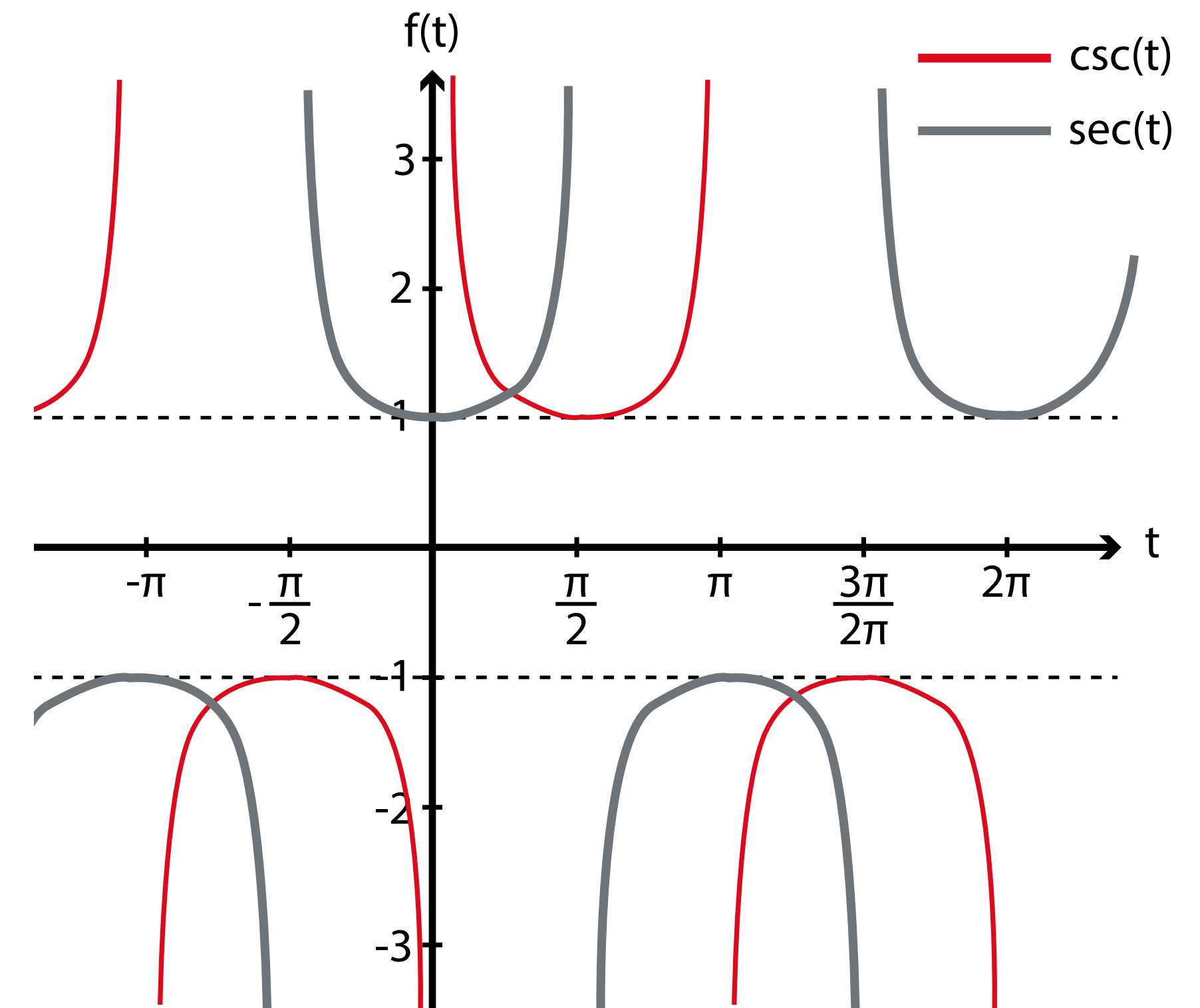
Kotangens: $\cot(t) = \frac{1}{\tan(t)} = \tan^{-1}(t)$



Kehrwerte und Umkehrfunktionen

Die Ableitungen der Kehrwerte erhalten wir über die Kettenregel oder alternativ über die Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \csc(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sin(t)} & \left| \begin{array}{ll} g(t) = x^{-1} & g'(t) = -x^{-2} \\ h(t) = \sin(t) & h'(t) = \cos(t) \end{array} \right. \\
 &= -\cos(t) \frac{1}{\sin^2(t)} \\
 &= -\tan^{-1}(t) \csc(t) = -\cot(t) \csc(t)
 \end{aligned}$$



Kehrwerte und Umkehrfunktionen

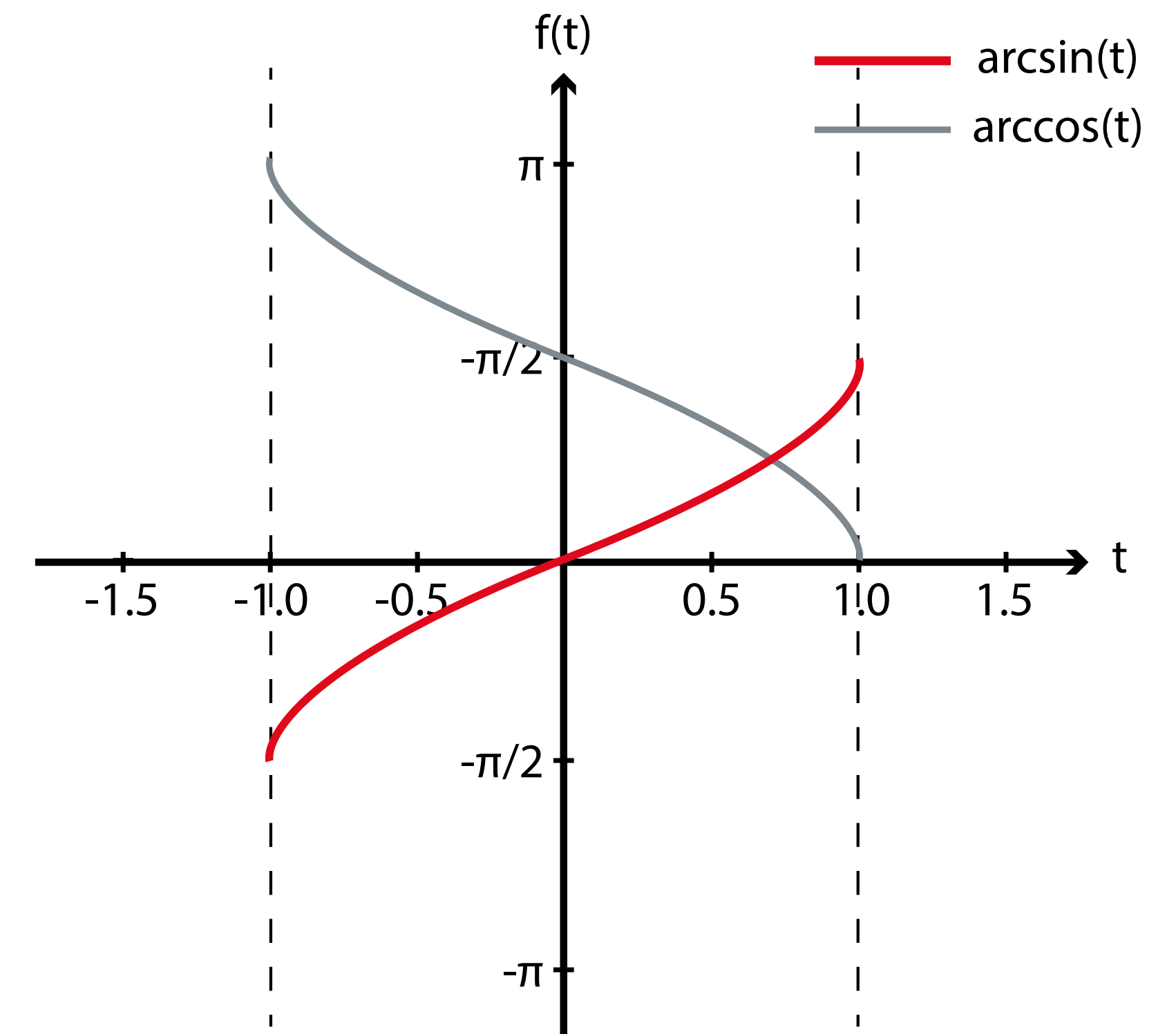
Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Grundfunktionen werden mit dem Präfix "arcus" (kurz: arc) bezeichnet.

$$\arcsin(t)$$

$$\arccos(t)$$

$$\arctan(t)$$

Die Umkehrung ist jedoch nicht eindeutig, da ein bestimmter Sinuswert für unendlich viele Argumente erreicht werden kann.



Kehrwerte und Umkehrfunktionen

Vorsicht! Auch wenn die "arcus" Funktionen im Taschenrechner gerne mit einer Potenz von -1 gezeigt werden, ist damit eigentlich der Kehrwert und nicht die Umkehrfunktion gemeint!

$$\arcsin(t) \neq \sin^{-1}(t)$$

$$\arccos(t) \neq \cos^{-1}(t)$$

$$\arctan(t) \neq \tan^{-1}(t)$$



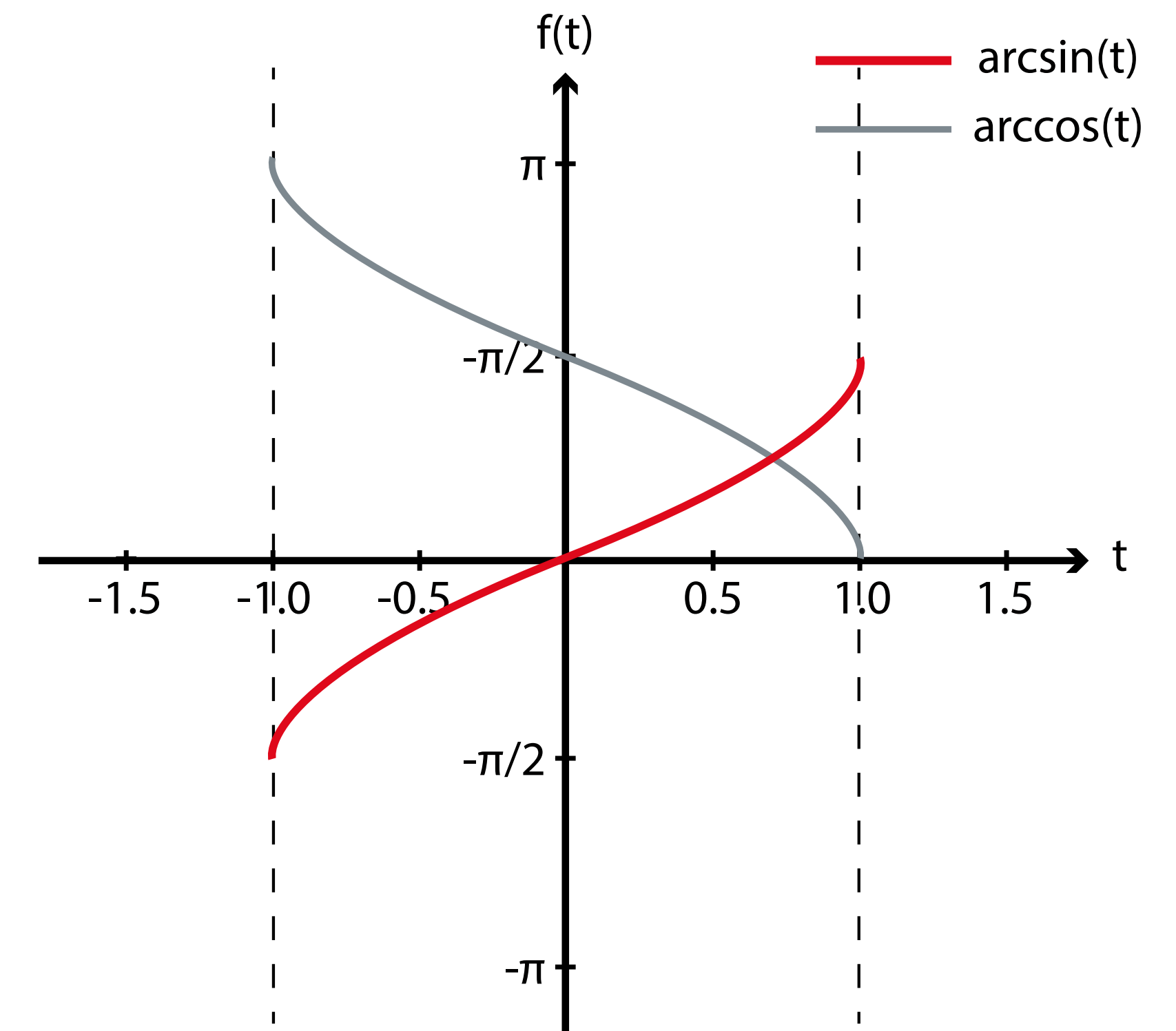
Kehrwerte und Umkehrfunktionen

Ihre Ableitungen sind nicht das, was man erwarten würde:

$$\frac{\partial}{\partial t} \arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \arccos(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \arctan(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$



Hyperbolische Trigonometrie

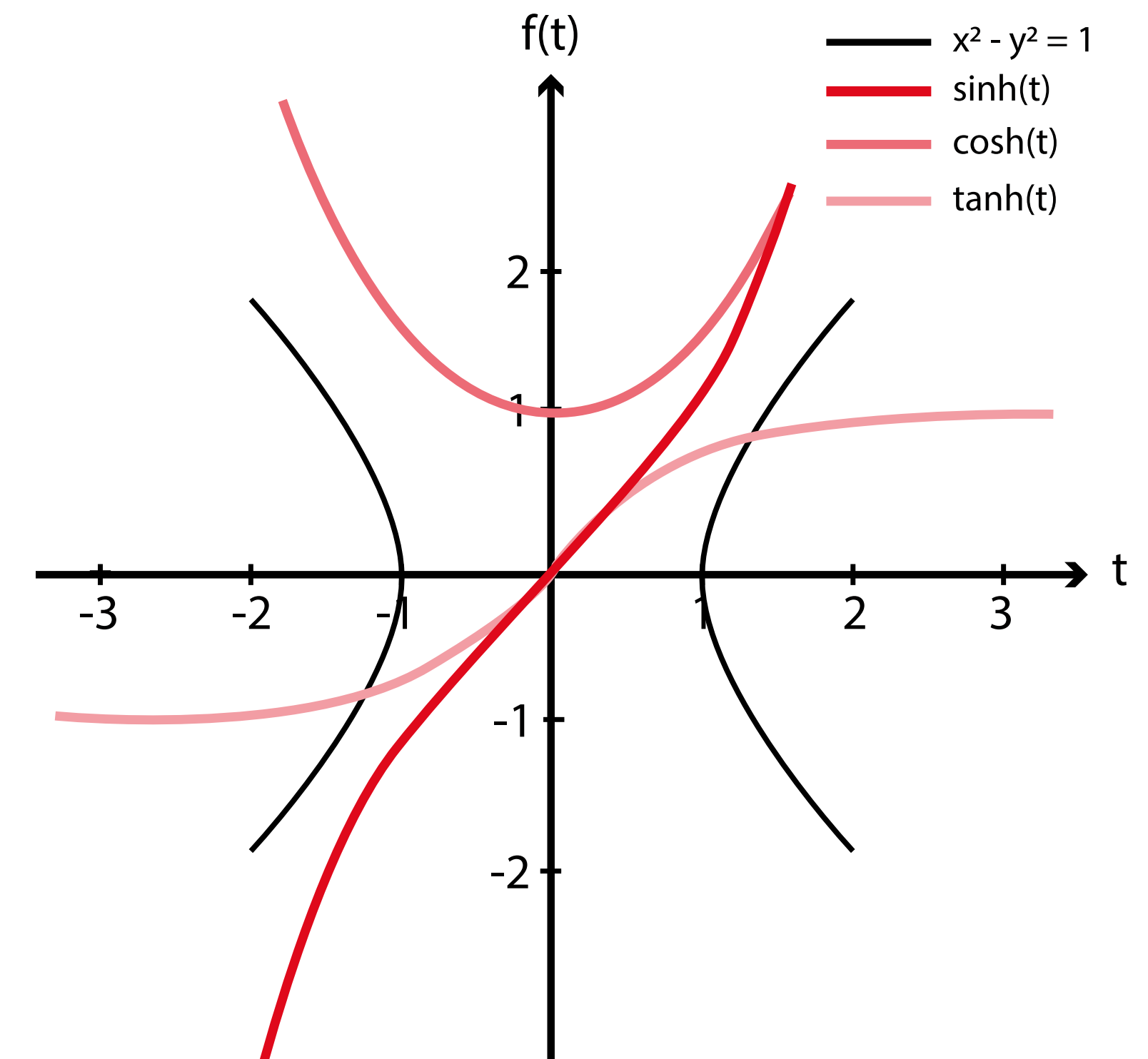
Ersetzen wir den Einheitskreis mit einer Hyperbel, erhalten wir die hyperbolischen Funktionen:

$$\sinh(t)$$

$$\cosh(t)$$

$$\tanh(t)$$

Obwohl sie im Schaubild ganz anders aussehen als $\sin(t)$, $\cos(t)$ und $\tan(t)$ teilen sie viele Eigenschaften mit diesen ...



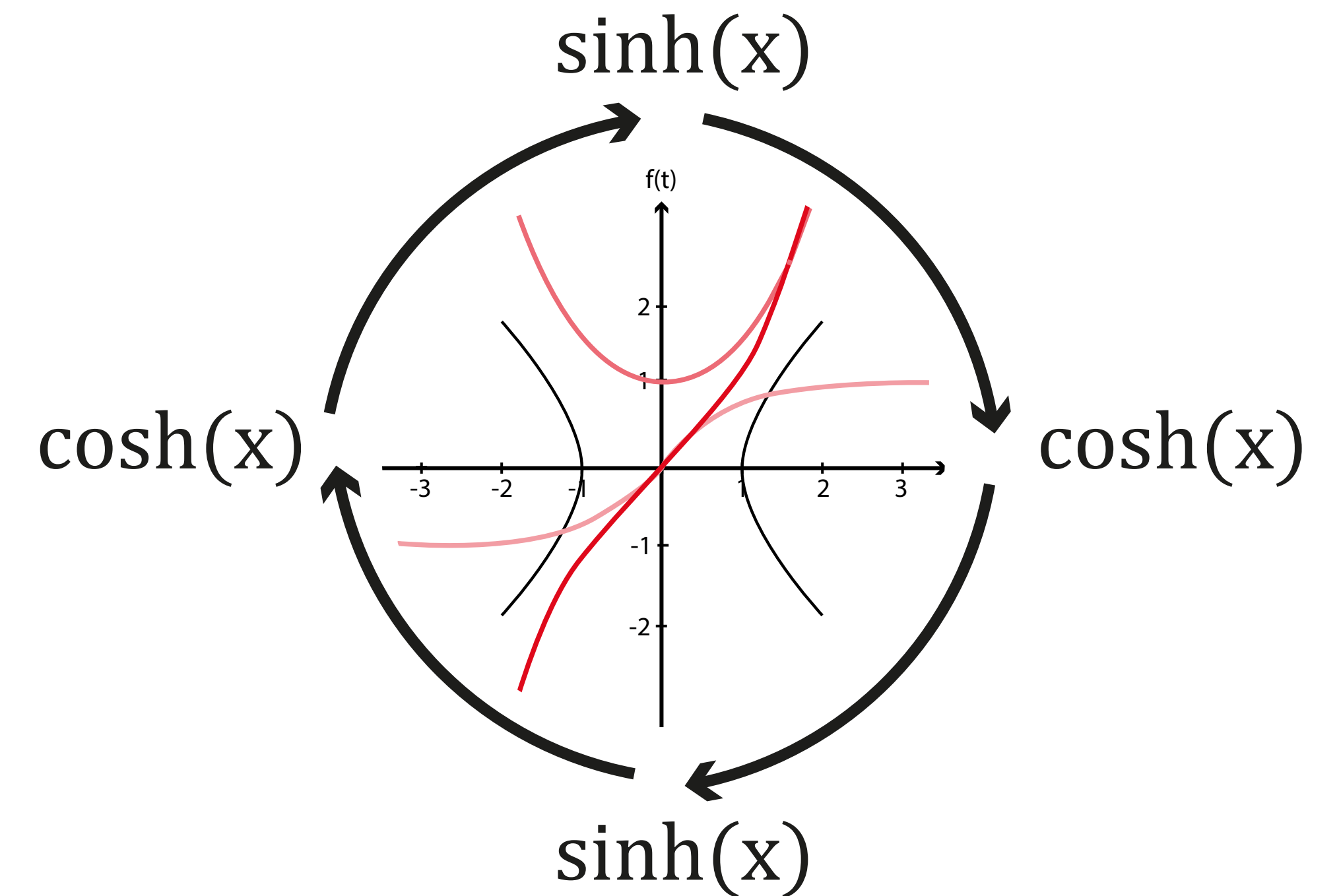
Hyperbolische Trigonometrie

Der Tangens ist wieder der Quotient von Sinus und Kosinus:

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$$

Für die Quadrate von $\sinh(t)$ und $\cosh(t)$ gilt:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$



Berechne die erste Ableitung der Funktionen f, g, h und k und berechne das unbestimmte Integral.

$$f(x) = \sin(x) \cdot \tan(x)$$

$$h(x) = \sin(\arctan(x))$$

$$g(x) = \frac{\tan(x)}{\sec(x)}$$

$$k(x) = \frac{\sin^3(x) + \sin(x)\cos^2(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$$

$$\int -\sin(x) \cdot \sin(\cos(x)) \, dx$$

$$f(x) = \sin(x) \cdot \tan(x)$$

$$f'(x) = \cos(x) \cdot \tan(x) + \sin(x) \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$= \cos(x) \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \sin(x) + \frac{\tan(x)}{\cos(x)}$$

$$g(x) = \frac{\tan(x)}{\sec(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cos(x)$$

$$g'(x) = \cos(x)$$

$$h(x) = \sin(\arctan(x))$$

$$h'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cos(\arctan(x))$$

$$= \frac{1}{x^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

$$k(x) = \frac{\sin^3(x) + \sin(x)\cos^2(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$$

$$= \frac{\sin(x) [\sin^2(x) + \cos^2(x)]}{\sqrt{\sin(x)}} = \sqrt{\sin(x)}$$

$$k'(x) = \cos(x) \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}$$

Substitution:

$$\int \overbrace{-\sin(x)}^{g'(x)} \cdot \underbrace{\sin(\cos(x))}_{f(g(x))} dx = \int -\sin(x) \sin(u) \frac{du}{-\sin(x)} = -\cos(u)$$

Nebenrechnung:

$$u = g(x) = \cos(x) \quad \frac{du}{dx} = -\sin(x) \Leftrightarrow dx = \frac{du}{-\sin(x)}$$

Rücksubstitution:

$$-\cos(u) = -\cos(\cos(x))$$

Komplexe Zahlen

Bevor wir uns zu tief in die hyperbolische Trigonometrie eingra-
ben, wollen wir unseren reellen Zahlenbereich erweitern.

Wir definieren uns eine neue Zahl - die imaginäre Einheit i:

$$i = \sqrt{-1}$$

Und definieren die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als:

$$\mathbb{C} = \{ a+ib \mid a,b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}$ und die Zahl 0
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}_0$ und negative Zahlen ohne Komma
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$ und als Bruch darstellbaren Zahlen
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$ und nicht als Bruch darstellbare Zahlen
$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$ und negative Wurzeln

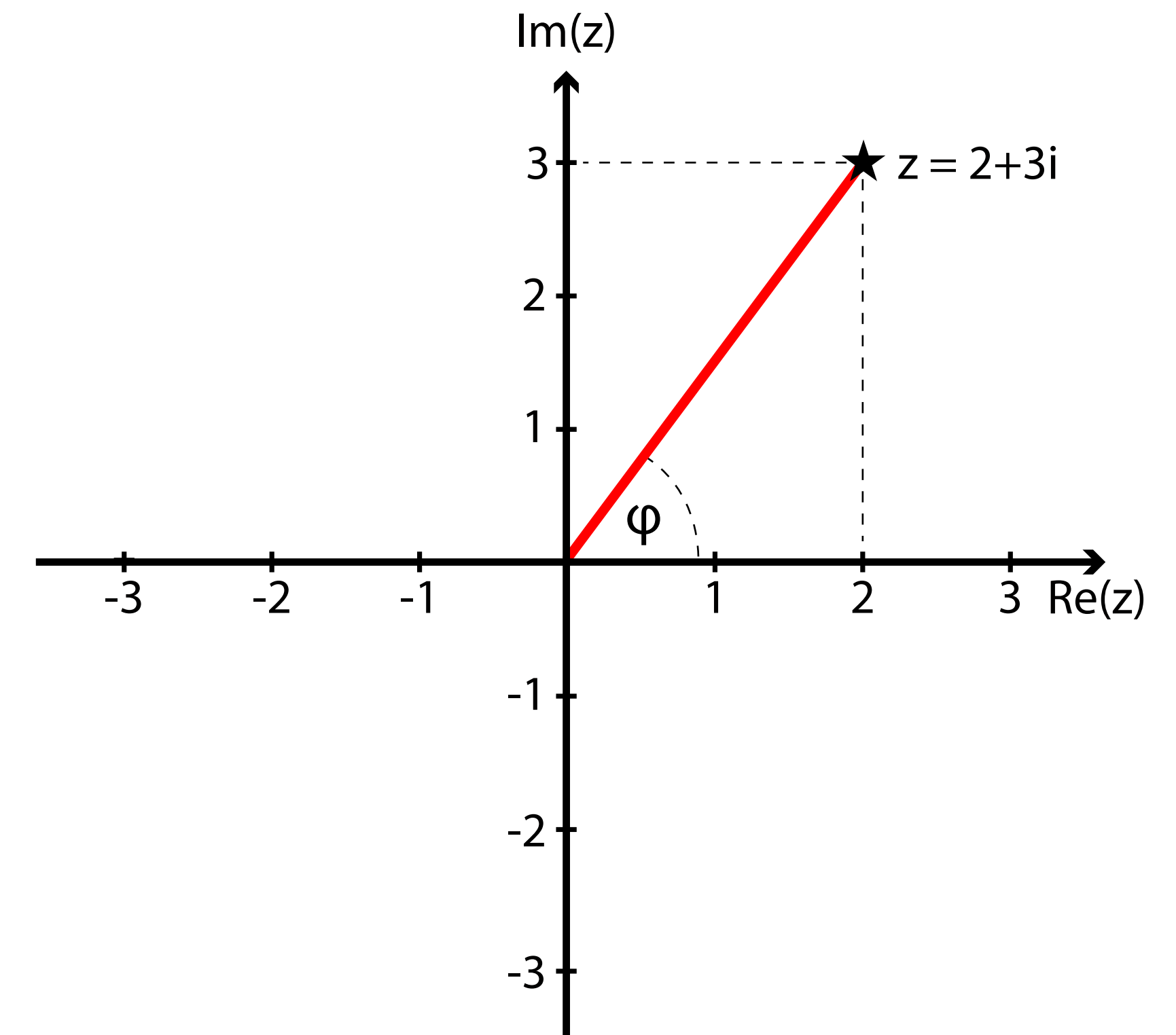
Komplexe Zahlen

Die Koeffizienten a und b bezeichnet man als realen und imaginären Teil der komplexen Zahl z .

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(a+ib) = a$$

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(a+ib) = b$$

Eine komplexe Zahl kann als Vektor im zweidimensionalen Raum dargestellt werden. Die Koeffizienten entsprechen dann den Werten der kartesischen Koordinaten.



Komplexe Zahlen

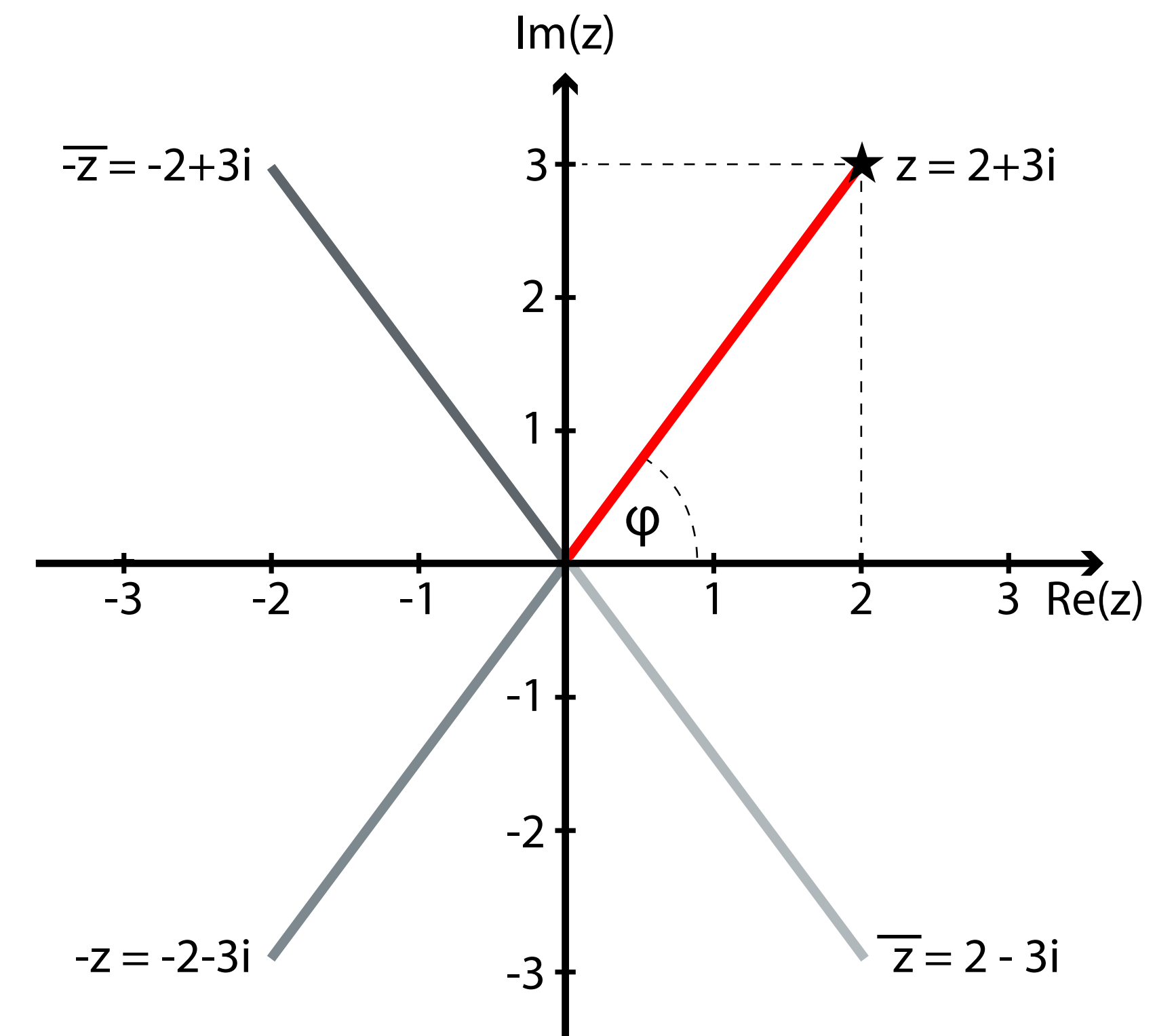
Multipliziert man eine komplexe Zahl mit einem reellen Faktor, dann wirkt sich die Multiplikation auf beide Koeffizienten aus.

Bei der Multiplikation mit -1 ändert sich das Vorzeichen von realem und imaginärem Teil.

Mit der komplexen Konjugation (Querbalken auf komplexer Zahl) kann man gezielt das Vorzeichen des Imaginärteils ändern:

$$z = a + ib$$

$$\bar{z} = a - ib$$

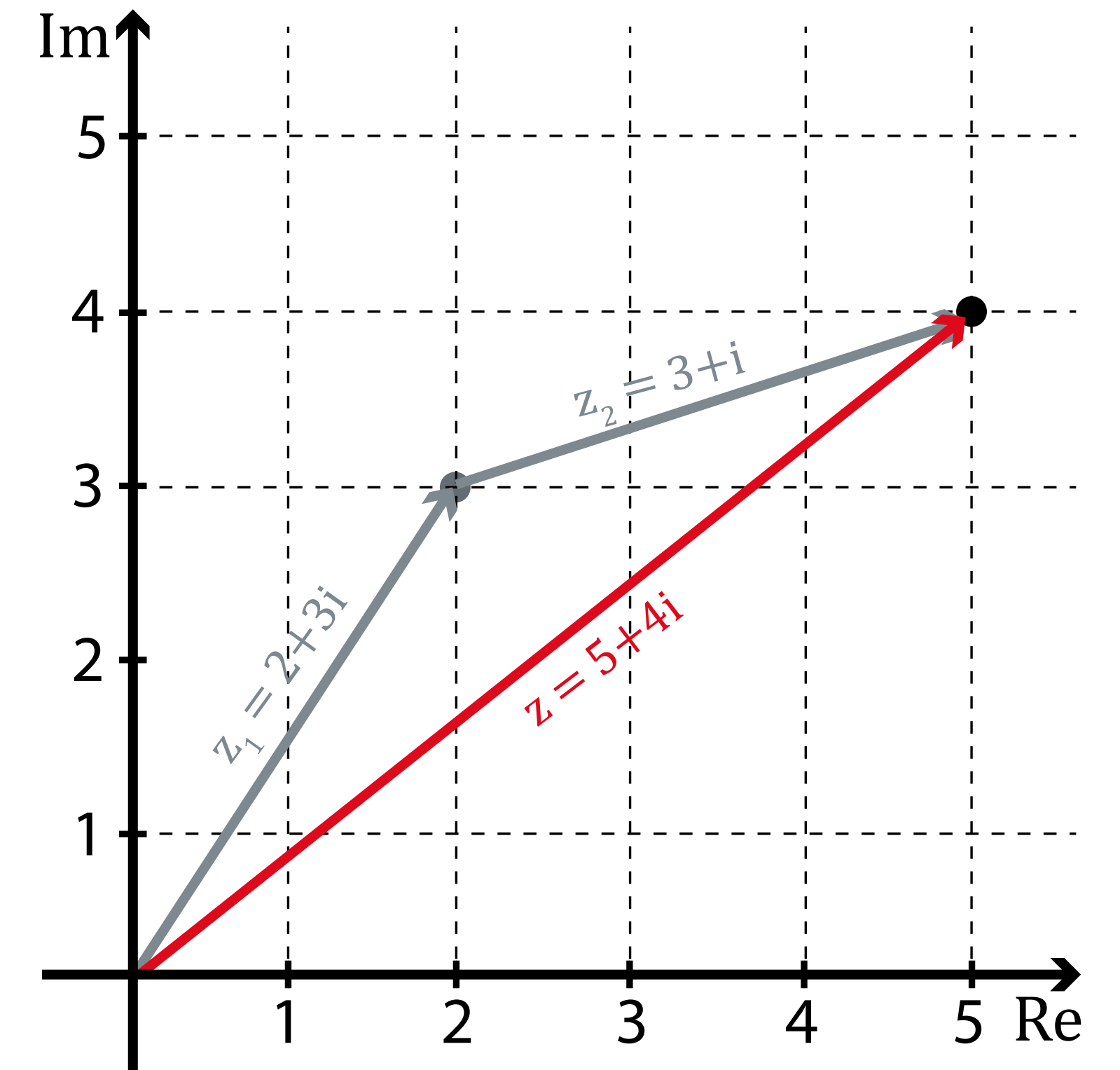


Komplexe Zahlen

Bei der Addition und Subtraktion verrechnen wir den realen Teil und den imaginären Teil getrennt voneinander:

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$$

Das Vorgehen entspricht somit der Addition und Subtraktion von Vektoren.



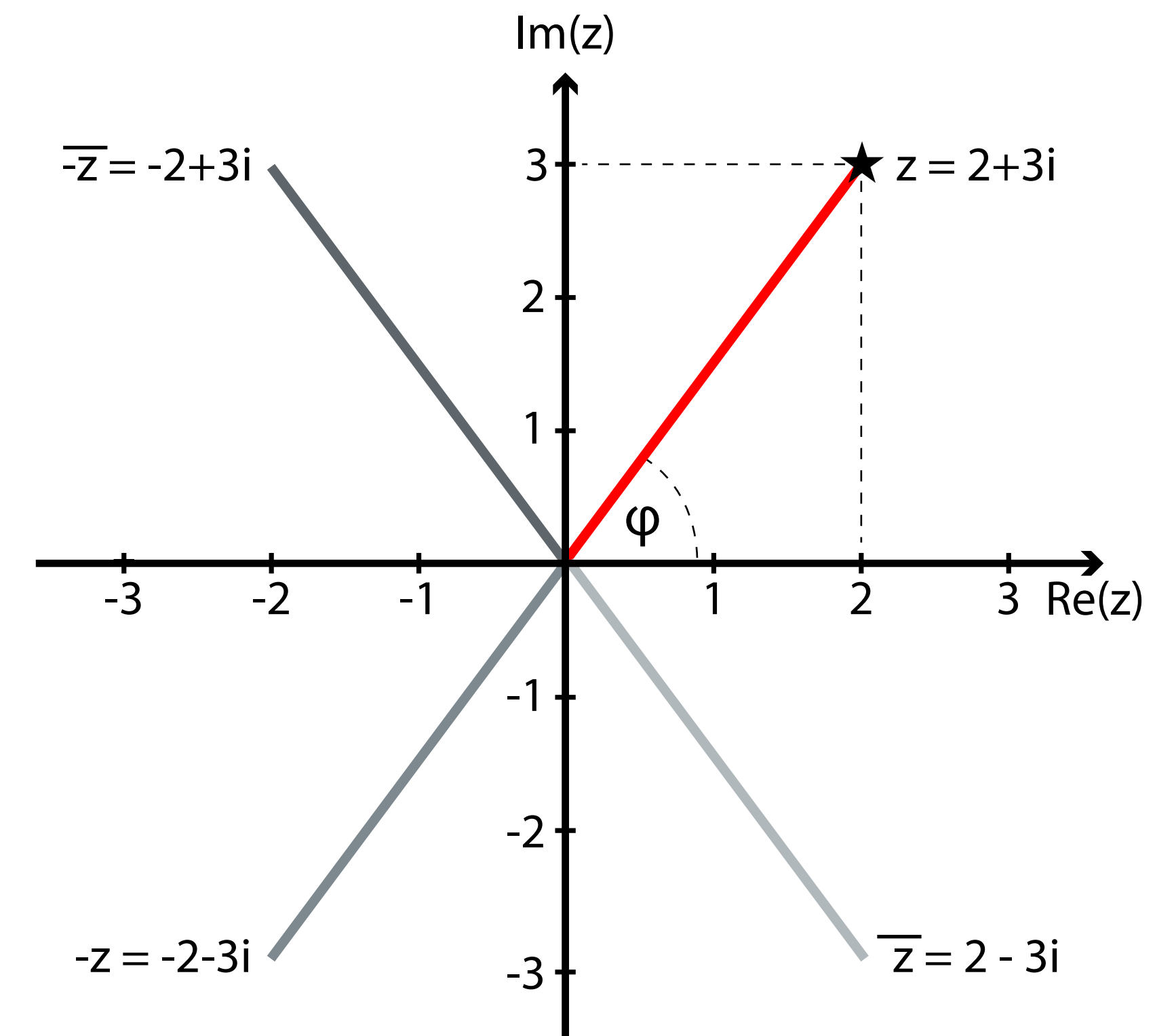
Komplexe Zahlen

Bei der Multiplikation benötigen wir das Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ia_2 b_1 - b_1 b_2) \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

Für die Quadrierung folgt:

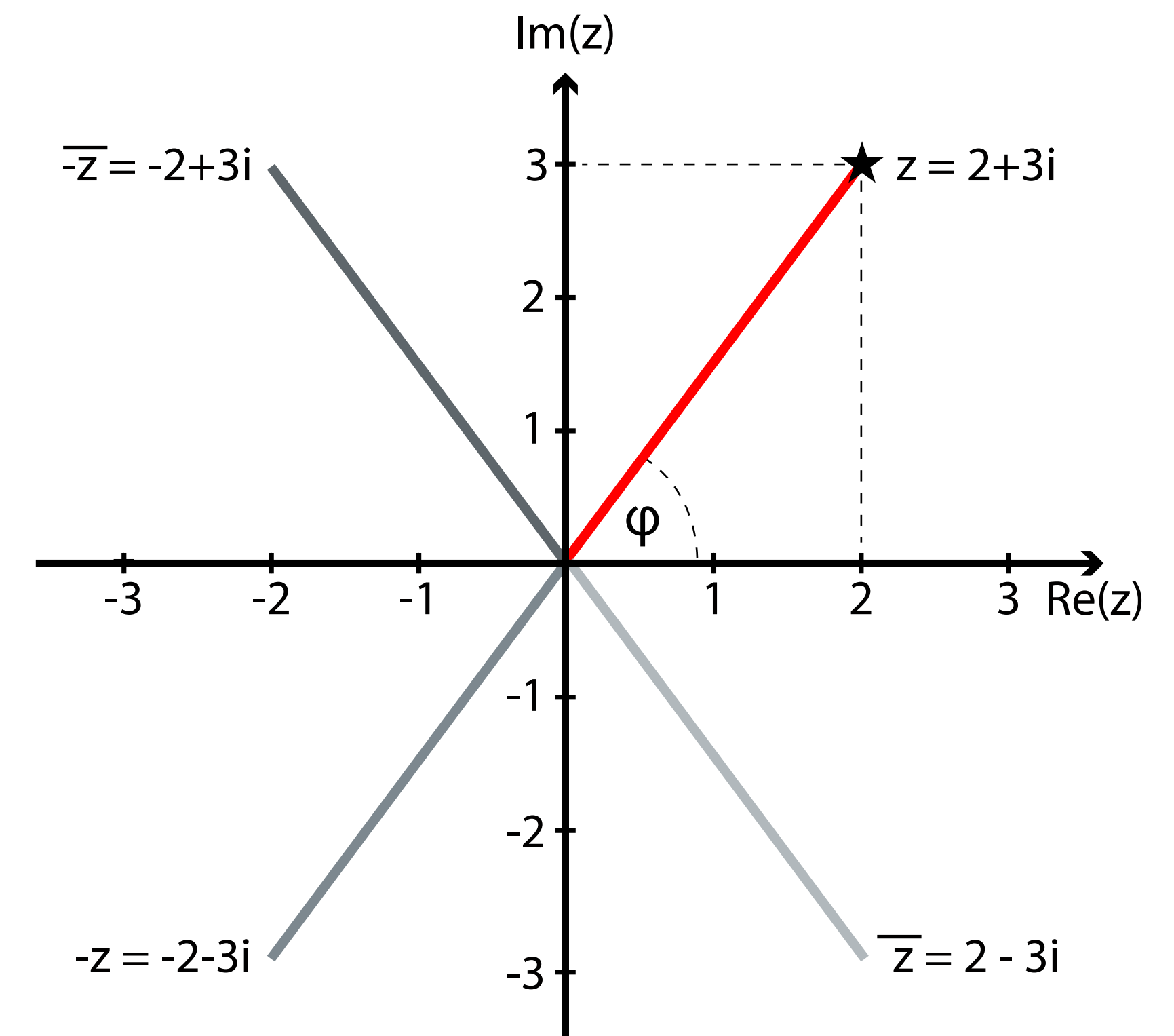
$$\begin{aligned} z \cdot z &= (a + ib) \cdot (a + ib) = (a^2 + 2iab - b^2) \\ &= a^2 - b^2 + 2ab \cdot i \end{aligned}$$



Komplexe Zahlen

Die Division wird durch Erweitern mit dem komplex konjugierten Nenner durchgeführt:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i\end{aligned}$$

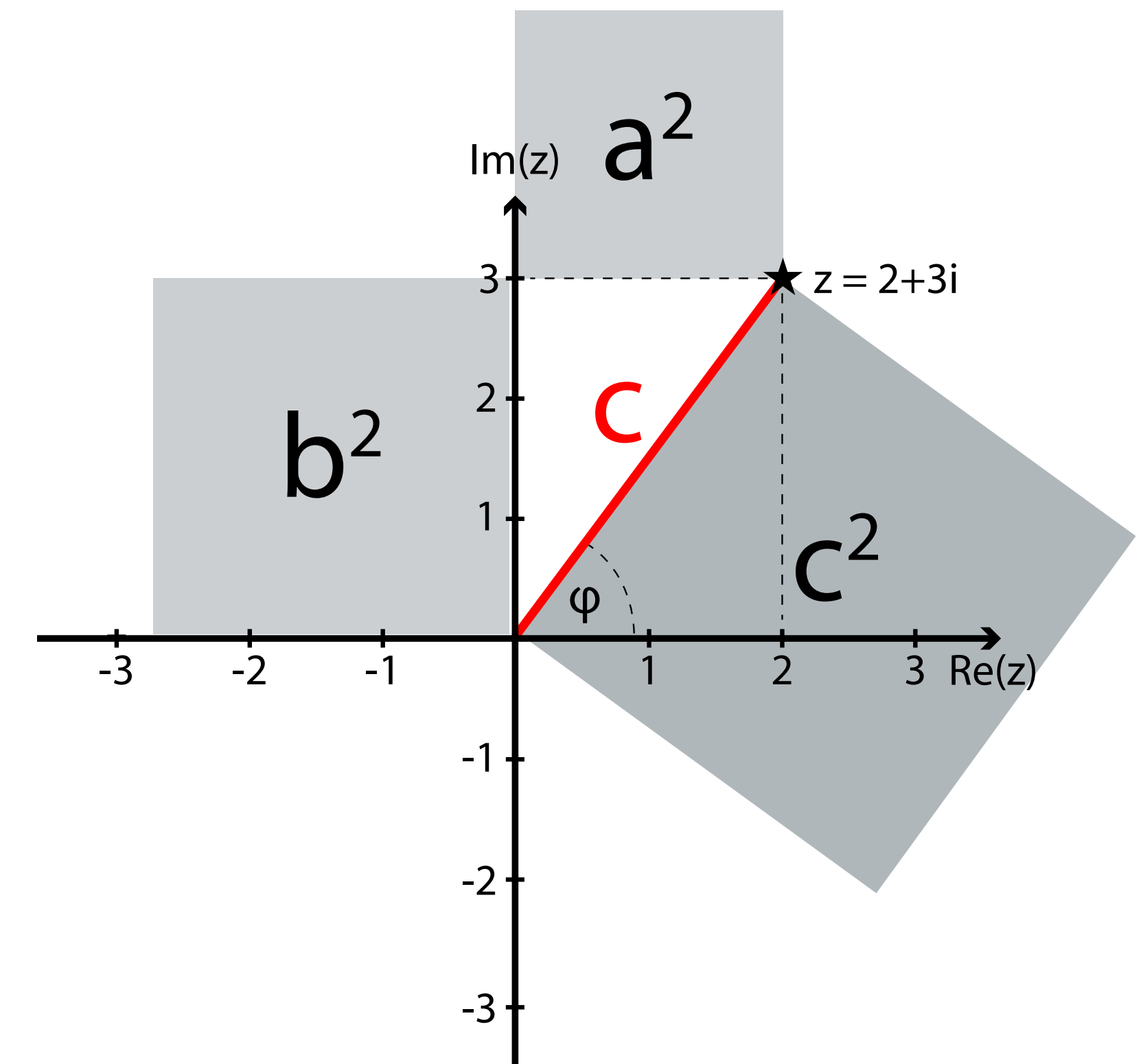


Komplexe Zahlen

Der Betrag einer komplexen Zahl, wird über die euklidische Norm bestimmt:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Der Betrag entspricht der Länge des Vektors in der zweidimensionalen kartesischen Darstellung.



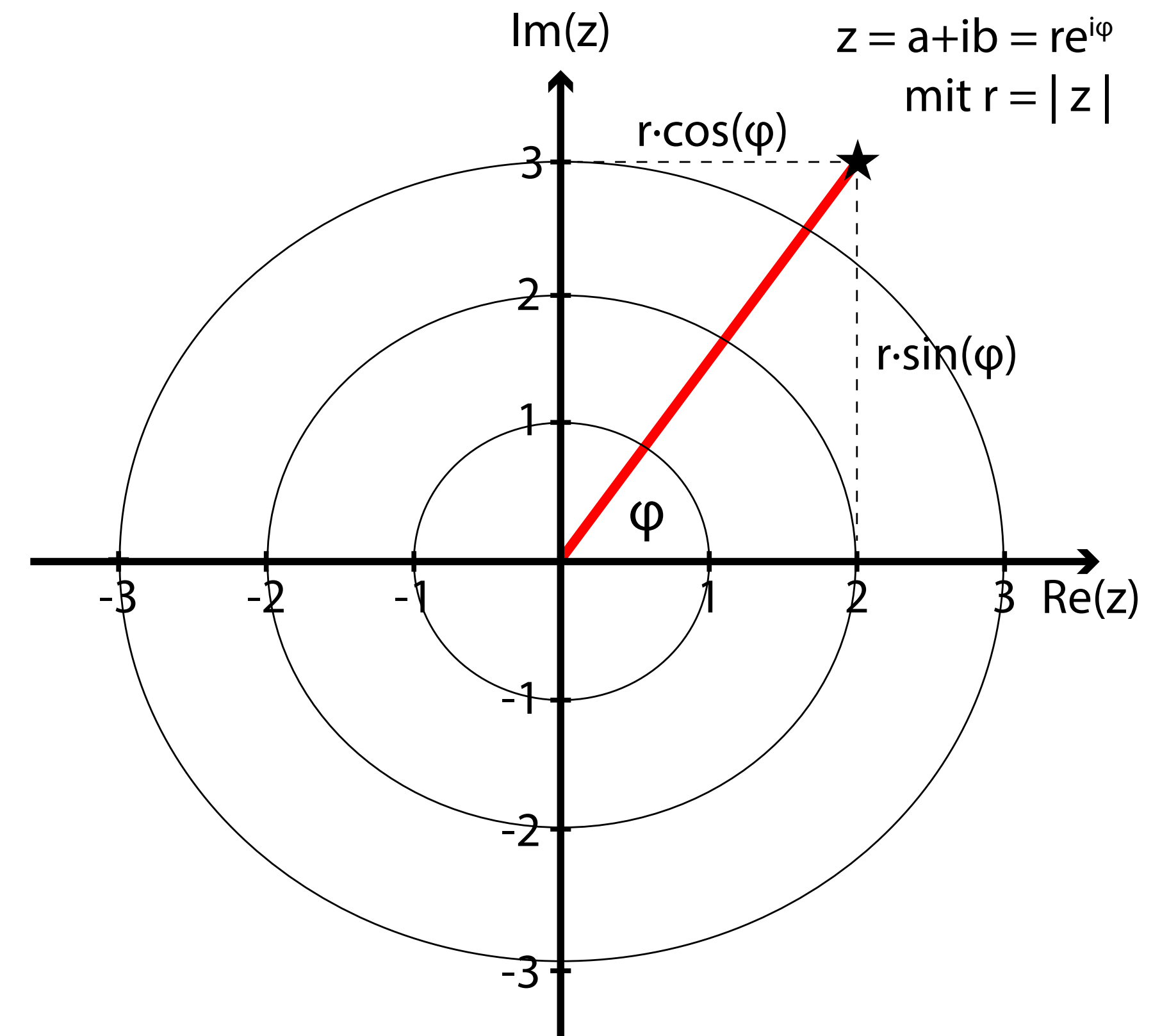
Komplexe Zahlen

Die Eulersche Formel verbindet komplexe Zahlen mit Trigonometrie und der Exponentialfunktion:

$$z = a+ib = r \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = re^{i\varphi}$$

Für die Umrechnung der Koeffizienten in Polarkoordinaten brauchen wir neben dem Betrag von z auch:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



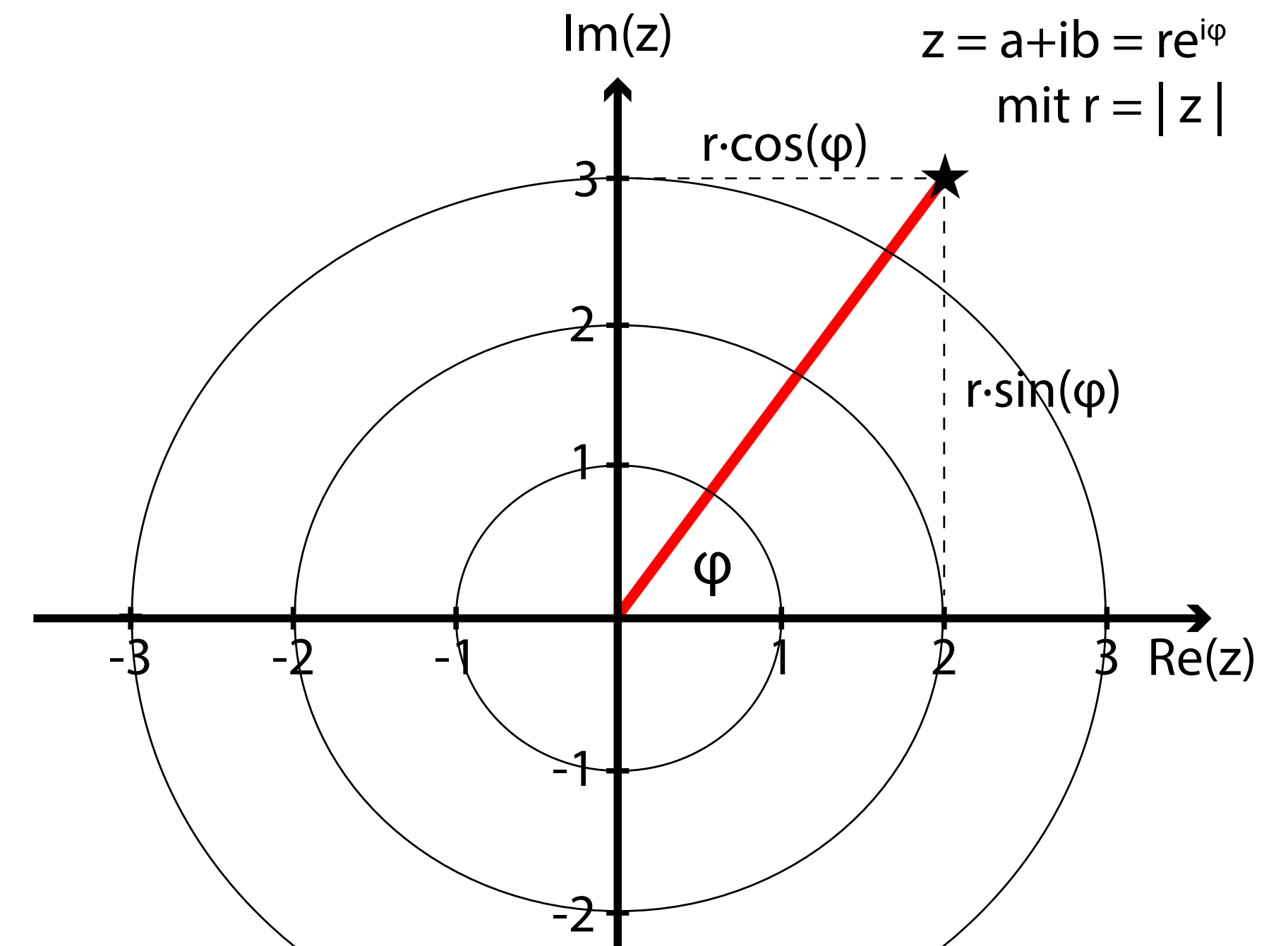
Komplexe Zahlen

Aus der Eulerschen Formel folgt eine Gleichung für komplexe Exponentialfunktionen:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x [\cos(y) + i \cdot \sin(y)]$$

Insbesondere gilt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



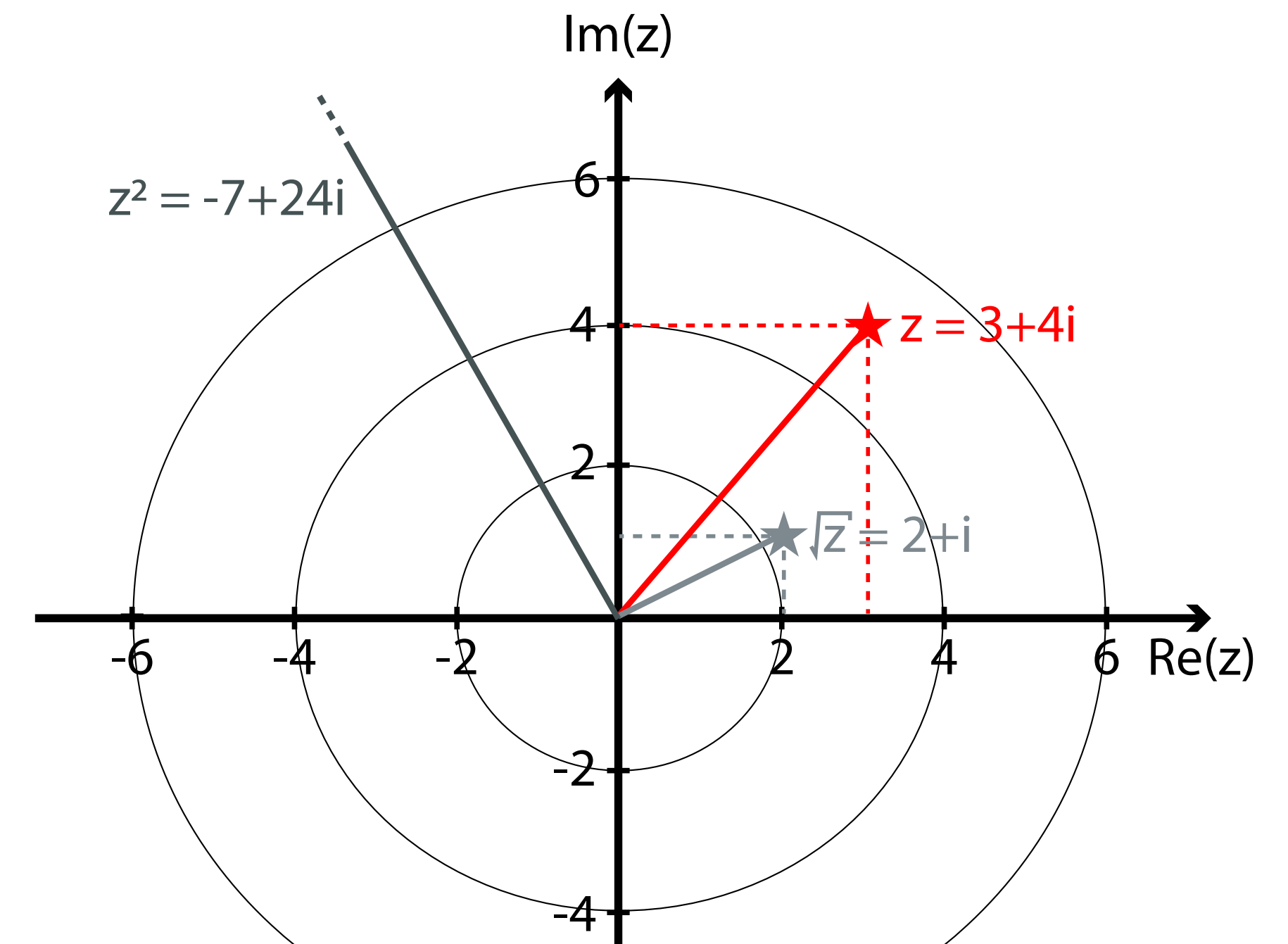
$$z = a+ib = r \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = re^{i\varphi}$$

Komplexe Zahlen

Die Eulersche Formel erlaubt nun auch das Potenzieren mit beliebigen reellen Exponenten.

$$z^x = (re^{i\varphi})^x = (r)^x (e^{i\varphi})^x = r^x e^{i\varphi x}$$

Eine Erhöhung von x erhöht den Radius in r^x und den Winkel in der hinteren e -Funktion. Durch Letzteres wird eine Drehbewegung im Schaubild erzeugt!

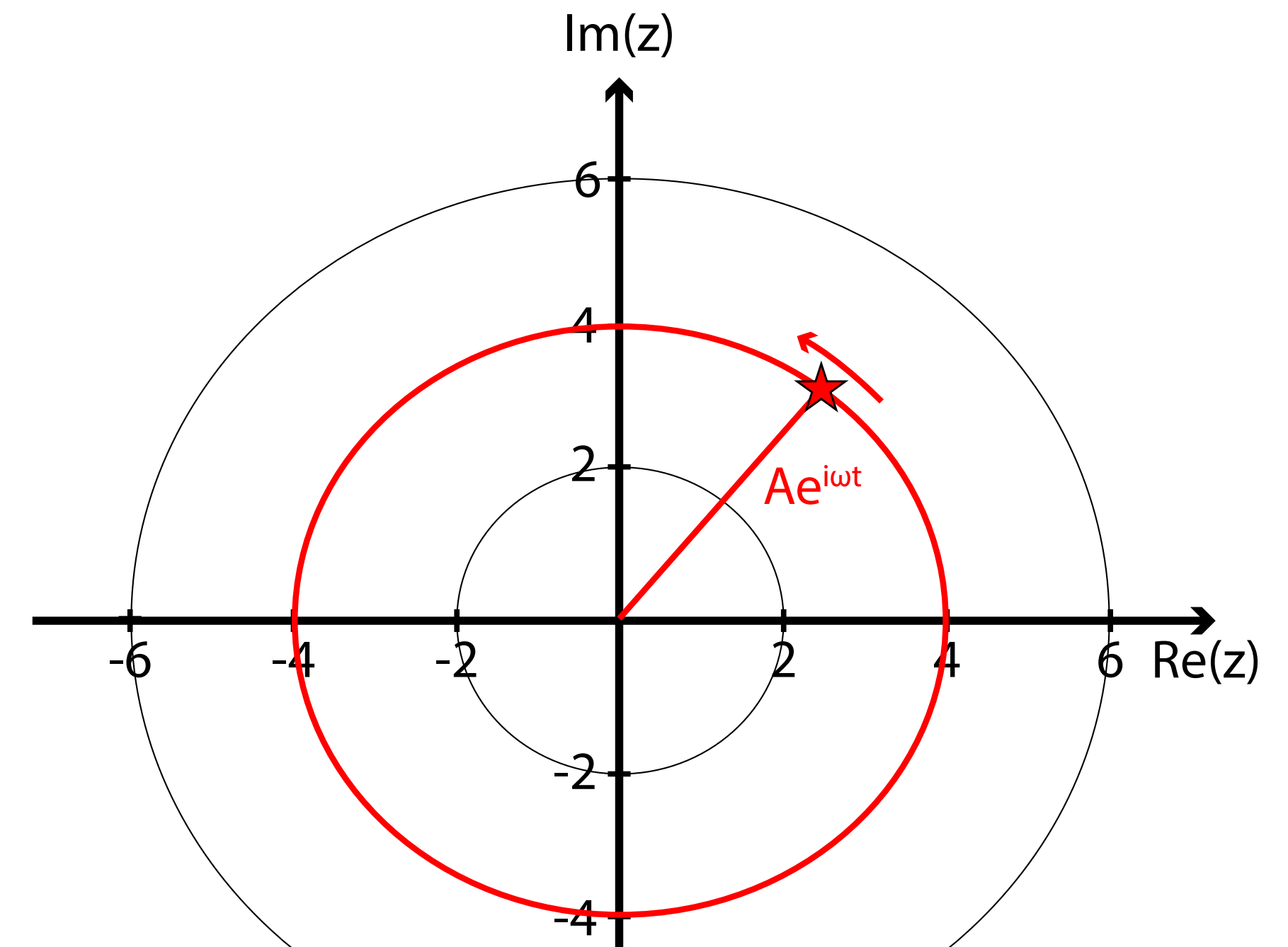


$$z = a + ib = r \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = re^{i\varphi}$$

Komplexe Zahlen

Mithilfe dieser "Drehbewegung" können wir Wellen, d.h. Sinus- und Kosinusfunktionen, als Exponentialfunktion darstellen:

$$A \cdot [\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)] = A e^{i\omega t}$$



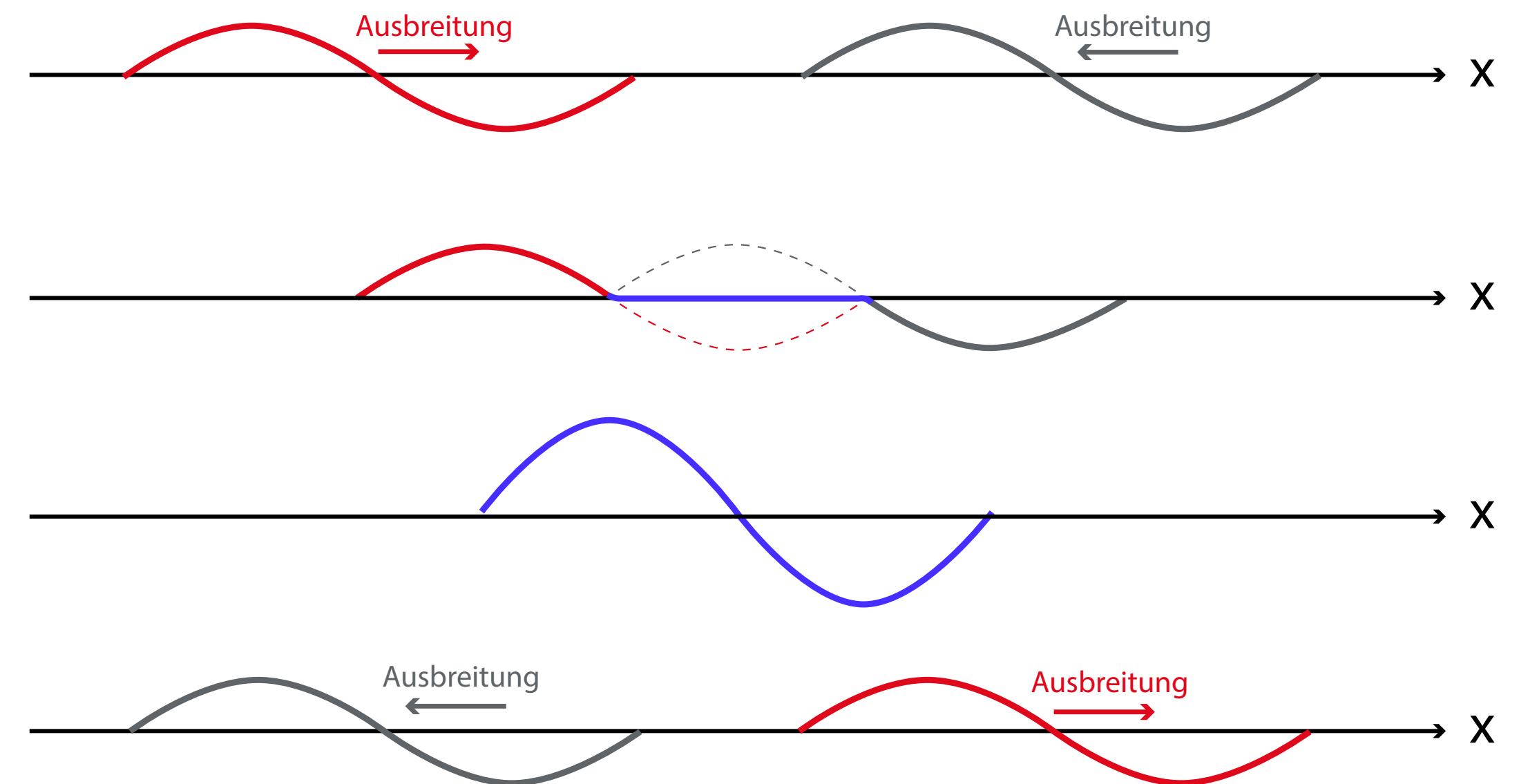
$$z = a + ib = r \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = r e^{i\varphi}$$

Fouriertransformation

Was passiert, wenn zwei Wellen aufeinandertreffen? Die Antwort hängt natürlich von der Art dieser Wellen ab, wobei wir sehr häufig Linearität annehmen können:

Die Wellen beeinflussen sich nicht.

Die Amplitude an einem bestimmten Ort und Zeitpunkt entspricht der Summe der beiden Teilamplituden.

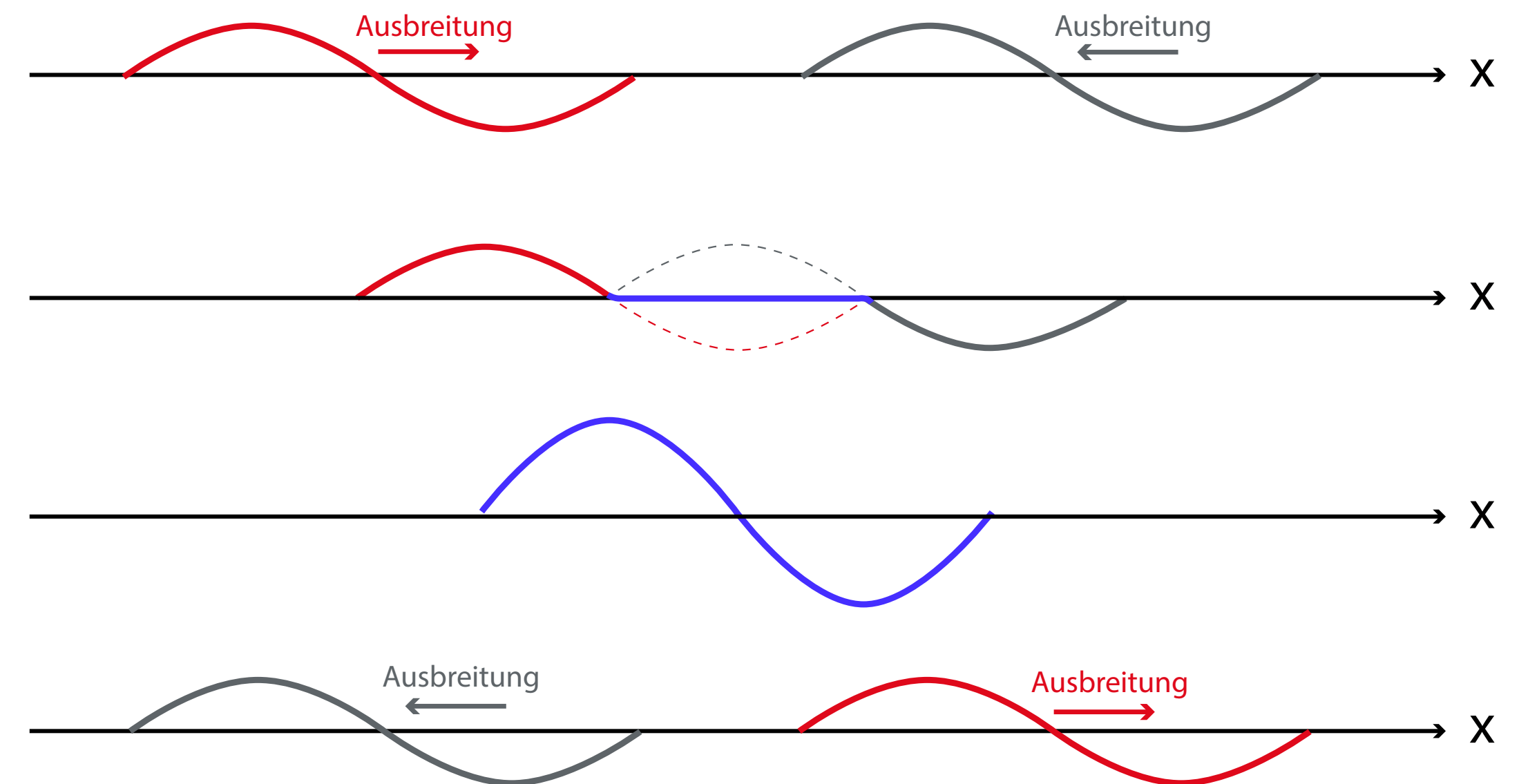


Fouriertransformation

Destruktive Interferenz Sind die Wellen gegenphasig, dann schwächen sich die Amplituden ab.

Konstruktive Interferenz Sind die Wellen gleichphasig, dann verstärken sich die Amplituden.

Die einzelnen Wellen bleiben aber unverändert.

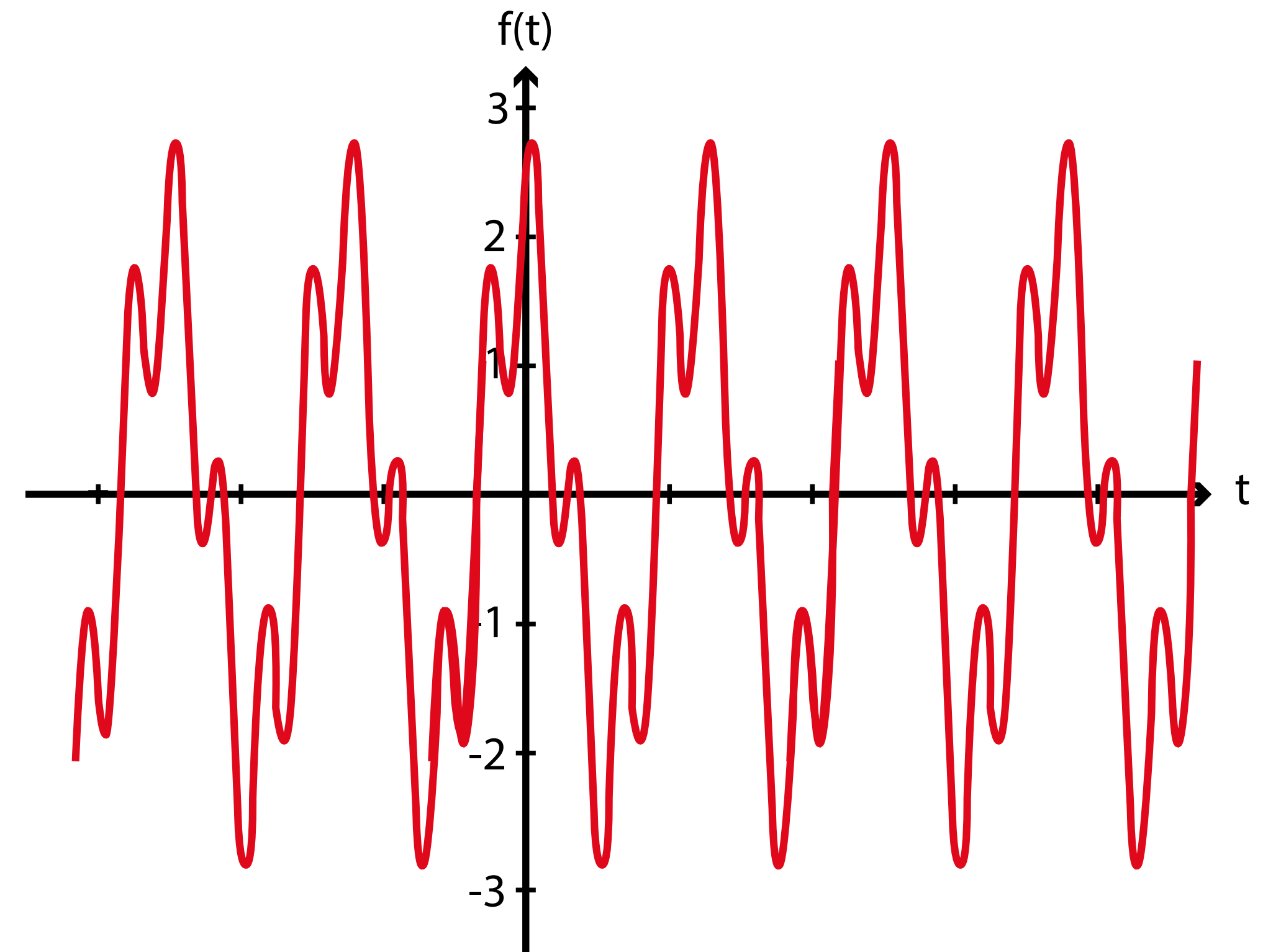


Fouriertransformation

Überlagern sich mehrere Wellen an einem bestimmten Ort, ergibt sich daraus eine Gesamtwellenfunktion $f(t)$.

Die Gesamtwellenfunktion $f(t)$ enthält alle einzelnen Wellen, aber wie können wir diese einzelnen Wellen voneinander trennen?

Aus welchen Wellen besteht der rechts gezeigte Graph?



Fouriertransformation

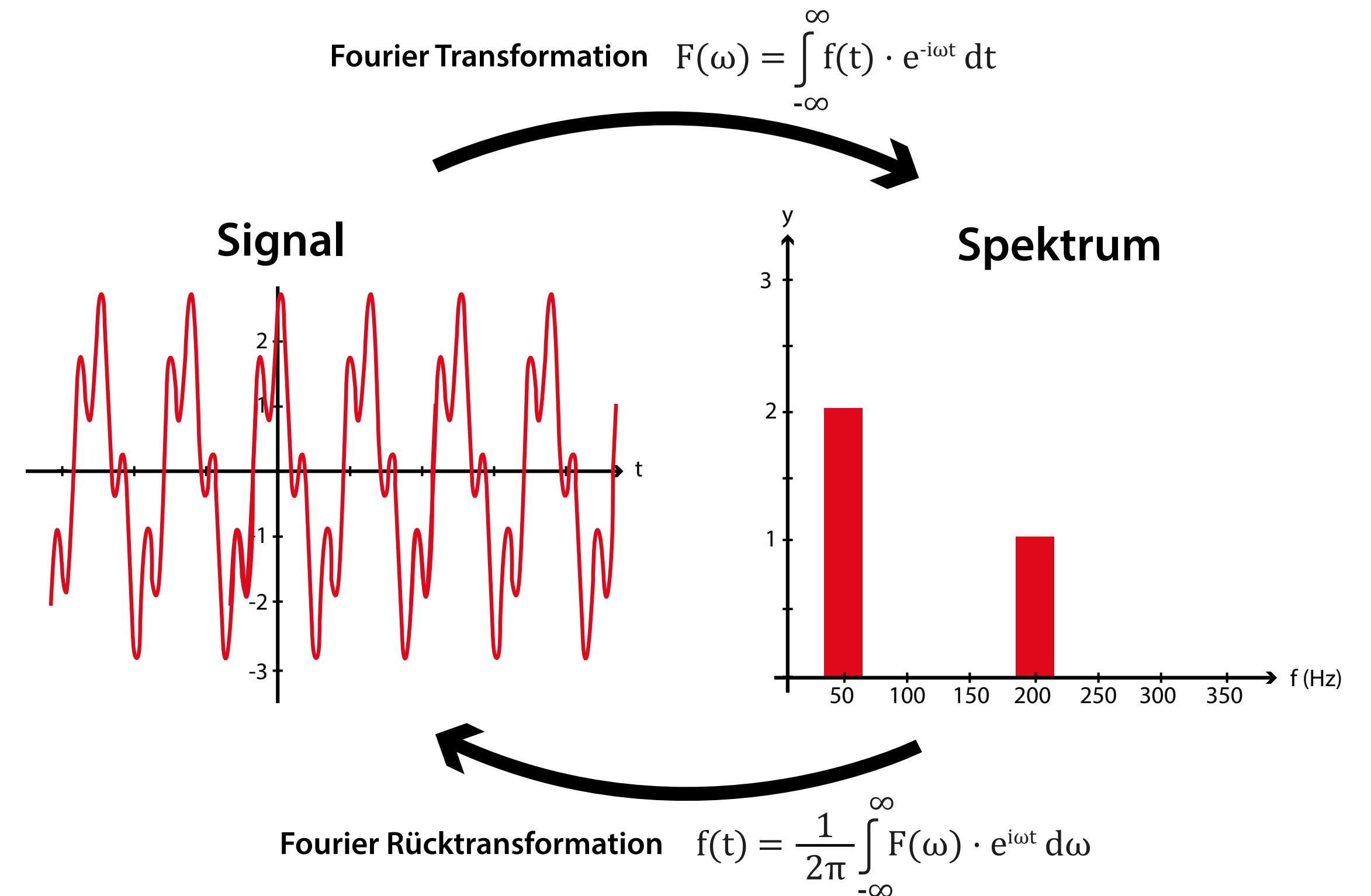
Die Fouriertransformation ist eine Abbildung der zeitlichen Darstellung $f(t)$ in eine spektrale Darstellung $F(\omega)$.

$f(t)$ Amplitude abhängig von der Zeit

$|F(\omega)|$ Anteil der Frequenz am Gesamtsignal

Mathematische Grundlage ist die Darstellung einer Welle als Exponentialfunktion mit komplexem Exponent:

$$A \cdot [\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)] = A e^{i\omega t}$$



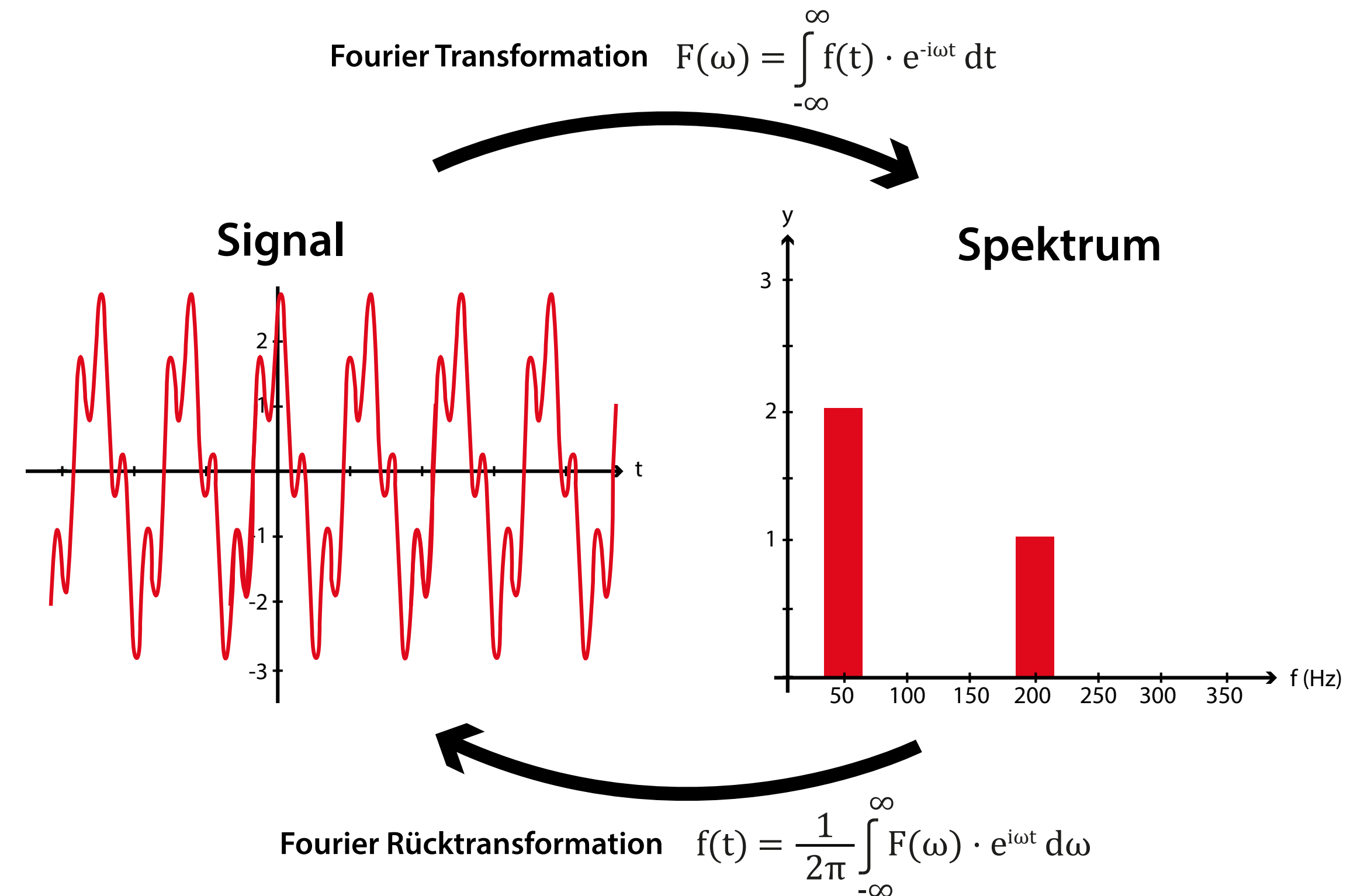
Fouriertransformation

Die Transformation vom Signal zum Spektrum erfolgt durch die Integraltransformation:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Die Rücktransformation vom Spektrum zum Signal erfolgt analog dazu über:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

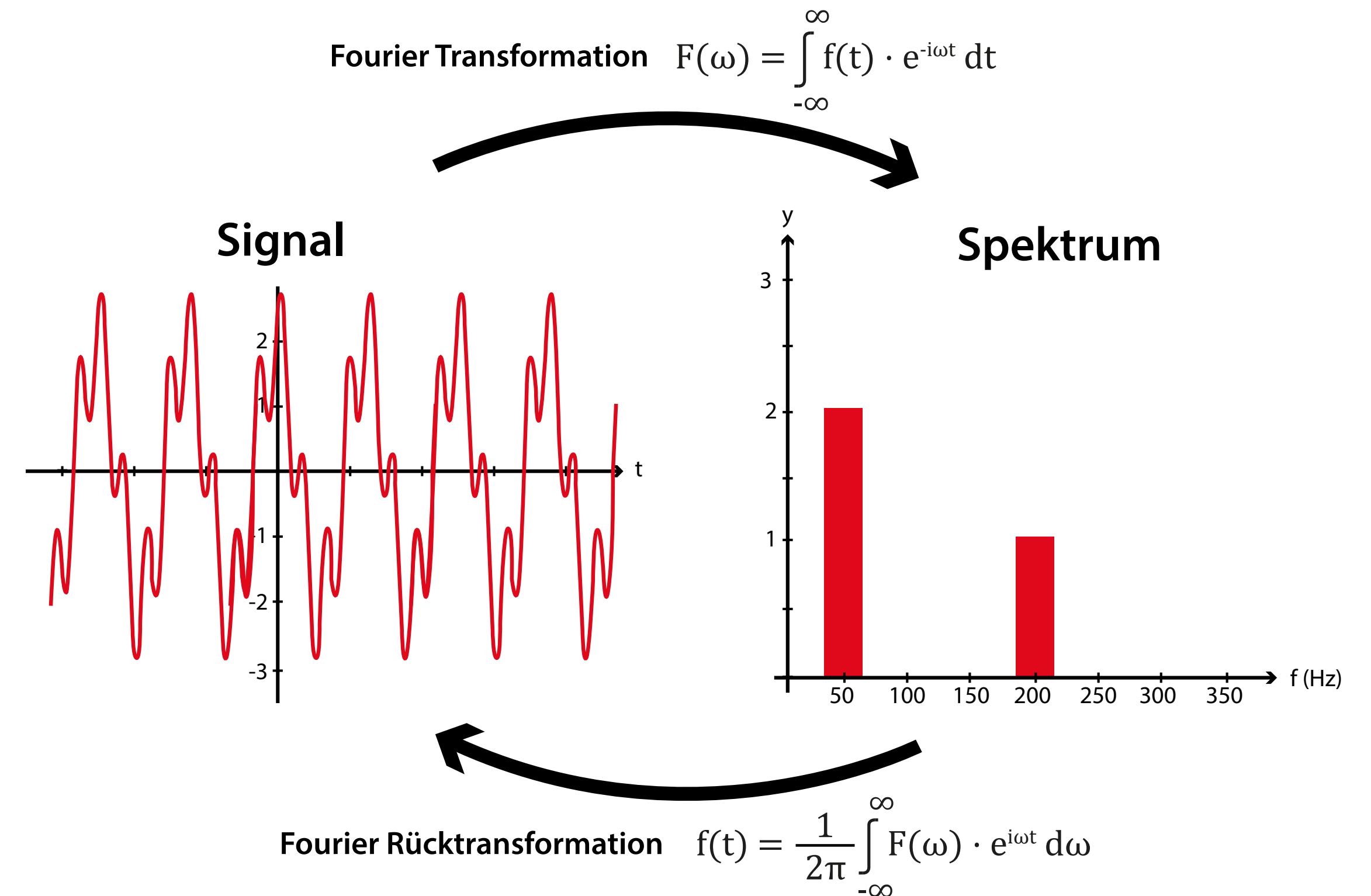


Fouriertransformation

Die Fourieranalyse hat viele Anwendungen in der Physik und bei den Ingenieuren, aber was machen wir in Data Science damit?

Periodizität von Zeitreihen: Viele Zeitreihen haben eine oder mehrere periodische Komponenten. Mit der Fourieranalyse können wir diese identifizieren!

Aber eine Zeitreihe ist doch keine Funktion?



Fouriertransformation

Es gibt eine diskrete Variante der Fouriertransformation (DFT), die wir für Zeitreihen verwenden können.

Wir erreichen damit aber auch den Punkt, wo analytische Lösungen von Hand nicht mehr praktikabel sind.

Wir werden ab jetzt Software zu Hilfe nehmen. Im Falle der Fouriertransformation verwenden wir einen Fast Fourier Transformation (FFT) Algorithmus.

Ab hier beginnt die Numerik!

